



# MECHANICS OF SMART STRUCTURES

Available Online at: <http://jms.qut.ac.ir/>



## Free vibration analysis of functionally graded rectangular Nano-plates with considering surface effect based on nonlocal elasticity theory

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

K. Khorshidi<sup>1</sup>  
M. Ghasemi<sup>2</sup>  
M. Bahrami<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mechanics, Arak University, Arak, Iran,  
[k-khorshidi@araku.ac.ir](mailto:k-khorshidi@araku.ac.ir)

<sup>2</sup> Ms.C, Mech. Eng., Arak Univ., Arak, Iran

#### \* Correspondence

Address: Department of Mechanics, Arak University, Shahid Beheshti Street  
Arak, Iran. Postal Code: 38156-88349.  
Phone: 08632625720  
Fax: 08634173450  
[k-khorshidi@araku.ac.ir](mailto:k-khorshidi@araku.ac.ir)

#### Article History

Received: September 16, 2020  
Accepted: November 06, 2020  
ePublished: January 31, 2021

### ABSTRACT

The aim of this paper is to study the free vibration of functionally graded rectangular nano-plates with considering surface effect. The Nonlocal elasticity theory and surface elasticity theory based on the modified shear deformation theories has been used to obtain the natural frequency of the nano-plate. In modified shear deformation theories, various functions such as exponential function, hyperbolic function and etc. are used to include the effect of transverse shear deformation and rotary inertia. Nonlocal elasticity theory and surface elasticity theory are employed to considering effect of nonlocal parameter and surface effect on the natural frequency of functionally graded rectangular nano-plate respectively. The properties of materials vary continuously through the thickness according to Mori-Tanaka scheme. The governing differential equations of vibration of functionally graded nano-plate are derived by using the Hamilton's principle and this equations solved by using the Galerkin method to obtain the natural frequencies. Finally, the effect of various parameters such as surface parameters, nonlocal parameters, aspect ratio ( $a/b$ ), length to thickness ratio ( $a/h$ ) and Power Law indexes on the natural frequency of nano-plate are presented.

**Keywords:** Free vibration, Nonlocal elasticity theory, Surface effect, Functionally graded nano-plates, Surface elasticity theory, modified shear deformation theories

# تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق های تابعی مدرج مستطیلی با در نظر گرفتن اثر سطح بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی

کورش خورشیدی\*

دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران

محسن قاسمی

کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران

مهدی بهرامی

کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران

با استفاده از اصل همیلتون بدست آمده و برای محاسبه فرکانس های طبیعی از روش حل گلرکین استفاده شده است. در نهایت تاثیر پارامتر های مختلف از قبیل پارامتر های سطح، پارامتر های غیر محلی، نسبت طول به عرض  $a/b$ ، نسبت طول به ضخامت  $a/h$  و اندیس توانی روی فرکانس طبیعی نانو ورق ارائه شده است.

کلید واژه‌ها

ارتعاش آزاد، تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی، اثر سطح، نانو ورق تابعی مدرج، تئوری الاستیسیته‌ی سطح، تئوری های اصلاح شده تغییر شکل برشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۶

\* نویسنده مسئول: [k-khorshidi@araku.ac.ir](mailto:k-khorshidi@araku.ac.ir)

## ۱ مقدمه

با توجه به کاربرد وسیع ورق در صنایع مختلف از جمله صنایع نظامی، کشتیرانی، صنایع هوافضا و صنایع ساخت تجهیزات مکانیکی، مطالعه روی رفتار ارتعاشی ورق‌ها بیش از گذشته مورد توجه قرار گرفته است. به طوری که مقالات و کتاب‌های زیادی در دهه‌های اخیر در این زمینه منتشر شده است. در دهه هفتاد میلادی تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های مستطیلی توسط لیسا [۱] انجام شده است. ردی و همکاران [۲] ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌ای را بررسی کرده‌اند. آن‌ها در این تحقیق از تئوری لایه‌ای<sup>۱</sup> استفاده کرده‌اند.

برای تحلیل ورق‌ها تئوری‌های مختلفی وجود دارد که از پرکاربردترین آن‌ها می‌توان به تئوری کلاسیک<sup>۲</sup> (CPT) [۳] و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>۳</sup> (FSDT) [۴] اشاره کرد. تئوری ورق کلاسیک برای ورق‌های نازک به جواب‌های دقیقی

## چکیده

هدف این مقاله مطالعه ارتعاش آزاد نانو ورق های تابعی مدرج مستطیلی با در نظر گرفتن اثر سطح می‌باشد. برای بدست آوردن فرکانس طبیعی نانو ورق از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی و تئوری سطح بر اساس تئوری های اصلاح شده تغییر شکل برشی استفاده شده است. در تئوری های اصلاح شده تغییر شکل برشی از توابع مختلف مانند توابع نمایی، هایپربولیکی و... جهت در نظر گرفتن تاثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی عرضی استفاده شده است. برای در نظر گرفتن اثر سطح از تئوری سطح گرتین-مرداچ و همچنین جهت در نظر گرفتن تاثیر پارامتر های غیر محلی بر فرکانس طبیعی نانو ورق تابعی مدرج از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی استفاده شده است. خواص مواد به طور پیوسته در راستای ضخامت و بر اساس مدل موری-تاناکا تغییر می‌کند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش نانو ورق تابعی مدرج

<sup>۲</sup> First Order Shear Deformation Theory

<sup>۱</sup> Layer-wise theory

<sup>۳</sup> Classical Plate Theory

اصلاح شده هارمونیکی به دست آورده‌اند. تونسلی و همکاران [۱۲] به تحلیل خمش ورق‌های ساندویچی با استفاده از تئوری اصلاح شده هارمونیکی پرداخته‌اند. خورشیدی و فلاح [۱۳، ۱۴] تحلیل کمانش نانو ورق تابعی مدرج را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمایی مورد بررسی قرار داده‌اند. ماهی و همکاران [۱۵] خمش و ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری اصلاح شده هاپربولیکی را مورد بررسی قرار داده‌اند. پیشرفت در صنایع مختلف از جمله صنایع هوافضا و نیروگاه‌های حرارتی باعث شده است که نیاز به مواد با مقاومت بالای حرارتی و مکانیکی بیش از گذشته مورد توجه قرار گیرد. ورق‌های ساخته شده از مواد تابعی مدرج<sup>۶</sup> (FGM) نسل جدیدی از ورق‌های کامپوزیتی می‌باشند که در این ورق‌ها خواص به تدریج در راستای ضخامت تغییر کرده و این تغییرات تدریجی سبب افزایش مقاومت ورق و همچنین استفاده مطلوب از همه‌ی فازها شده است. در این راستا پانیا تونگ و همکاران [۱۶] تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق‌های تابعی مدرج محدود به محیط الاستیک را انجام داده‌اند. ژائو و همکاران [۱۷] ارتعاش آزاد ورق‌های تابعی مدرج مستطیلی را بررسی کرده‌اند. آن‌ها در این تحقیق نتایج خود را برای ورق با جنس‌های مختلف از جمله  $Al/ZrO_2$ ،  $Al/Al_2O_3$  و  $SUS304/Si_3N_4$  ارائه داده‌اند. حسینی هاشمی و همکاران [۱۸] حل دقیق برای ارتعاش نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی را بررسی کرده‌اند و نتایج خود را برای شش شرط مرزی مختلف ارائه کرده‌اند. در مقیاس نانو اثر اندازه اهمیت پیدا می‌کند به گونه‌ای که هر دو روش تجربی و شبیه‌سازی اتمی نشان می‌دهند که اثر اندازه هنگامی که سازه در مقیاس کوچک مورد مطالعه قرار می‌گیرد نقش قابل توجهی در پیش‌بینی رفتار مکانیکی دارد. با توجه به اینکه روش‌های تجربی و شبیه‌سازی اتمی روش‌های پیچیده و پرهزینه‌ای می‌باشند، بهترین روش جایگزین برای مطالعه‌ی رفتار مکانیکی مواد استفاده از روابط مکانیک محیط پیوسته می‌باشد. در

منتهی می‌شود در شرایطی که هر چه ضخامت ورق زیاد می‌شود از دقت جواب‌های این تئوری کاسته می‌شود. دلیل این امر نادیده گرفته شدن تغییر شکل‌های برشی عرضی در تئوری کلاسیک است. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تأثیر کرنش‌های برشی عرضی در نظر گرفته شده است. همچنین اثر اینرسی دورانی که در تئوری کلاسیک ورق از آن صرف‌نظر شده، در این تئوری لحاظ می‌شود ولی به دلیل صفر نبودن تنش‌های برشی در سطوح آزاد ورق نیاز به ضریب تصحیح برشی<sup>۴</sup> می‌باشد. علاوه بر این تئوری‌ها، تئوری‌های اصلاح شده دیگری نیز ارائه شده است که در آن‌ها به دلیل در نظر گرفتن تنش برشی صفر در سطوح آزاد ورق دیگر نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی نیست. از جمله این تئوری‌های اصلاح شده می‌توان به تئوری‌های تغییر شکل برشی هارمونیکی، هاپربولیکی، پارابولیکی و نمایی اشاره کرد. بس و ردی [۵، ۶] به تحلیل ورق‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، تغییر شکل برشی مرتبه اول و تغییر شکل برشی مرتبه سوم پرداخته‌اند. در این تحقیق‌ها به ترتیب از روش‌های لوی<sup>۵</sup> و اجزاء محدود<sup>۶</sup> استفاده کرده‌اند. حسینی هاشمی و همکاران [۷] به تحلیل کمانش ورق‌های مستطیلی با بارهای درون صفحه‌ای مختلف پرداختند. آن‌ها در این تحقیق از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کرده‌اند. ماتسونگا [۸] تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد ورق تابعی مدرج با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم را مورد مطالعه قرار داده است. خورشیدی و فرهادی [۹] ارتعاش آزاد ورق کامپوزیتی مستطیلی در تماس با سیال محدود را با استفاده از تئوری‌های کلاسیک، تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم بررسی کرده‌اند. همچنین خورشیدی و همکاران [۱۰] به آنالیز حساسیت ورق کامپوزیتی مستطیلی در تماس با سیال محدود پرداخته و میزان حساسیت فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی به پارامترهای مختلف بررسی کردند. مانتاری و همکاران [۱۱] تنش‌ها و جابجایی‌های عرضی را با استفاده از تئوری

<sup>۶</sup> Finite Element Method<sup>۷</sup> Functionally graded material<sup>۴</sup> Shear correction factor<sup>۵</sup> Levy

پارامترهای مختلف سطح از جمله تنش باقیمانده سطح و چگالی سطح را بررسی کرده‌اند. در تحقیق حاضر به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف سطح مانند تنش باقیمانده سطح، ثوابت الاستیسیته-ی سطح و چگالی سطح روی رفتار ارتعاشی نانو ورق‌ها پرداخته شده است. تأثیر این پارامتر با در نظر گرفتن اثرات مقیاس و تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده برای ورق‌های تابعی مدرج برای اولین بار در تحقیق حاضر مورد تحلیل قرار گرفته است. در مقاله حاضر اثر سطح و تأثیر پارامترهای غیر محلی بر رفتار ارتعاشی نانو ورق تابعی مدرج مورد تحلیل قرار گرفته است. برای در نظر گرفتن اثر سطح از تئوری گرتین-مرداچ و برای مطالعه‌ی اثر پارامترهای غیر محلی از تئوری ارینگن استفاده شده است. همچنین برای به دست آوردن معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی نانو ورق از اصل همیلتون<sup>۱۳</sup> و برای نوشتن روابط جابجایی از تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی، مثلثاتی، پارابولیکی، هایپربولیکی و نیز دو تئوری پیشنهادی استفاده شده است.

## ۲ تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی

در مکانیک محیط‌های پیوسته (الاستیسیته محلی) رفتار مکانیکی مواد به‌عنوان یک جسم پیوسته به‌جای ذرات گسسته مدل می‌شود و فرض می‌شود که هیچ فضای خالی بین ذرات (اتم‌ها) وجود ندارد. الاستیسیته‌ی محلی یک تئوری بدون اثر مقیاس است و نمی‌تواند در محیط‌های نانومقیاس استفاده شود. الاستیسیته‌ی محلی در پیش‌بینی اثرات اندازه که در مقیاس‌های کوچک ارائه می‌شود، ناتوان است. در مقیاس‌های کوچک، ساختار میکرو برای ماده به‌طور قابل توجهی مهم می‌شود و تأثیرش دیگر نمی‌تواند نادیده گرفته شود. اثرات اندازه به اتم‌ها، مولکول‌ها و اندرکنش‌های آن‌ها وابسته می‌باشد. الاستیسیته‌ی محلی بر اساس روابط ساختاری است که

تئوری محیط پیوسته کلاسیک اثر اندازه در نظر گرفته نشده است و به همین دلیل این تئوری نمی‌تواند رفتار مکانیکی نانو ساختارها و میکرو ساختارها را به‌خوبی پیش‌بینی کند. به‌منظور رفع این نقص تئوری محیط پیوسته کلاسیک، تئوری‌های مختلفی ارائه شده است. از جمله این تئوری‌ها می‌توان به تئوری گرادیان کرنش<sup>۸</sup> [۱۹]، تئوری تنش کوپل<sup>۹</sup> [۲۰]، تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی ارینگن<sup>۱۰</sup> [۲۳-۲۱] اشاره کرد. بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی ارینگن تنش در هر نقطه از یک جسم پیوسته به کرنش در تمام نقاط آن جسم وابسته می‌باشد. خورشیدی و همکاران [۲۴]، [۲۵] تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی را بررسی نموده‌اند. آن‌ها در این تحقیق از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی استفاده کرده‌اند. کیم و ردی [۲۶] تحلیل خمش، ارتعاش و کماتش ورق‌های تابعی مدرج با استفاده از تئوری تنش کوپل را بررسی نموده‌اند. آن‌ها در این مقاله از روش حل ناولیر<sup>۱۱</sup> بهره برده‌اند. حسینی هاشمی و همکاران [۲۷] ارتعاش آزاد نانو ورق در سیال ویسکوز موضوع تحقیقشان بوده است.

به سبب بزرگ بودن نسبت مساحت سطح به حجم در مقیاس نانو، رفتار و خواص سطوح نقش قابل توجهی بر رفتار ارتعاشی نانو ورق‌ها ایفا می‌کنند. برای در نظر گرفتن اثر سطوح تئوری الاستیسیته‌ی سطح<sup>۱۲</sup> توسط گرتین و مرداچ [۲۸، ۲۹] ارائه شده است. این تئوری می‌تواند اثر تنش سطح را به‌خوبی پیش‌بینی کند. در سال‌های اخیر تحقیقاتی در این زمینه صورت گرفته است. به‌طور مثال وانگ و فنگ [۳۰] اثر تنش سطح و تنش باقی‌مانده را روی فرکانس طبیعی میکرو تیر با در نظر گرفتن دو سطح در بالا و پایین تیر بررسی کرده‌اند. به‌علاوه ابراهیمی و حیدری [۳۱] ارتعاش غیرخطی نانو ورق‌های تابعی مدرج را با در نظر گرفتن اثر سطح تحلیل کرده‌اند. آن‌ها در این مقاله از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده بهره برده‌اند و در تحقیق خود تأثیر

<sup>۱۱</sup> Navier solution technique

<sup>۱۲</sup> Surface elasticity theory

<sup>۱۳</sup> Hamilton's principle

<sup>۸</sup> Strain gradient theory

<sup>۹</sup> Couple stress theory

<sup>۱۰</sup> Eringen's Nonlocal elasticity theory

تنش‌ها در یک نقطه فقط به کرنش در همان نقطه بستگی دارد. اگرچه مدل‌های الاستیسیته‌ی محلی می‌توانند رفتار مکانیکی مواد مختلف را سریع و تقریبی پیش‌بینی کنند اما این مدل‌ها در برابر نانو ساختارها با مشکلاتی چون «اثرات سطح» و «اثرات اندازه» مواجه هستند. منشأ این اختلافات هنگام در نظر گرفتن فیزیک اندرکنش‌های مقیاس اتمی و تولید تنش در مقیاس اتمی آشکار می‌شود. شواهد تجربی بسیاری، اثرات سطح در نانومقیاس را نشان می‌دهد که ما می‌توانیم آن‌ها را اثرات کوچک مقیاس بنامیم. بنابراین روش‌های به‌روز شده‌ی وابسته به اندازه بر پایه‌ی محیط‌های پیوسته در مدل‌سازی نانو مواد نیاز می‌باشد که راه‌حل‌های سریع‌تر از شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی ارائه دهد درحالی‌که قادر باشد اثرات اندازه ناشی از ناپیوستگی و ناهمگنی طبیعی مواد واقعی را ترکیب و یکپارچه کند. یکی از متدهای وابسته به اندازه معروف که غالباً ارتعاش، کمانش و خمش نانو مواد استفاده می‌شود، تئوری الاستیسیته غیر محلی است. الاستیسیته محلی بر اساس رفتار محلی (یک نقطه) صرف‌نظر از محیط اطراف می‌باشد، درحالی‌که الاستیسیته غیر محلی اثر محیط اطراف را به حساب می‌آورد. این اثر در مقیاس اتمی (نانومقیاس) مهم و قابل‌ملاحظه است، جایی که یک اتم تحت تأثیر اتم‌های اطراف می‌باشد. مزیت روش غیر محلی آن است که اثرات اتمی در نانو مقیاس گرفته شده و در عین حال نتایج برای تمام جسم رسانده می‌شود.

در تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی، تنش در هر نقطه از جسم علاوه بر کرنش در همان نقطه، به کرنش در محیط اطراف نیز وابسته می‌باشد. بنابراین در این تئوری، تنش به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱].

$$\sigma_{ij}(x) = \int_V H(|x' - x|) \sigma_{ij}^c(x') dV(x') \quad (1)$$

که در رابطه بالا،  $x$  نقطه‌ای از جسم است که تحت تأثیر میدان تنش می‌باشد،  $x'$  نقطه‌ای دیگر از جسم می‌باشد و  $V$  حجمی از

$$LH(|x' - x|) = \delta(|x' - x|) \quad (2)$$

جسم است روی آن انتگرال گرفته می‌شود.  $\sigma_{ij}^c(x')$  تانسور تنش محلی و  $H(|x' - x|)$  تابع غیر محلی می‌باشد که به طول مشخصه داخلی وابسته است. فرض می‌کنیم که تابع غیر محلی به‌عنوان یک تابع گرین از عملگر دیفرانسیلی خطی می‌باشد.

$$L\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^c \quad (3)$$

که  $\delta$  دلتای دیراک و  $L$  عملگر دیفرانسیلی خطی می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) به یک فرم دیفرانسیلی اولیه به‌صورت رابطه‌ی (۳) می‌رسیم.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho(z)\ddot{u}_i \quad (4)$$

برای یک جسم الاستیک، رابطه‌ی تعادل به‌صورت رابطه‌ی (۴) تعریف می‌شود.

که در این رابطه  $\rho$  چگالی،  $f_i$  نیروهای حجمی و  $u_i$  بردار جابجایی می‌باشند. مدل غیر محلی با استفاده از عملگر دیفرانسیلی خطی  $L$  تعریف می‌شود که در حالت دوبعدی به‌صورت رابطه‌ی (۵) می‌باشد.

$$L = 1 - \mu^2 \nabla^2 \quad (5)$$

که  $\nabla^2$  عملگر لاپلاسین بوده و در مختصات کارتزین به‌صورت  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  تعریف می‌شود.  $\mu = e_0 a$  نیز پارامتر غیر محلی بوده که  $a$  طول مشخصه داخلی و  $e_0$  ثابت ماده است که توسط آزمایشات اندازه‌گیری می‌شود.

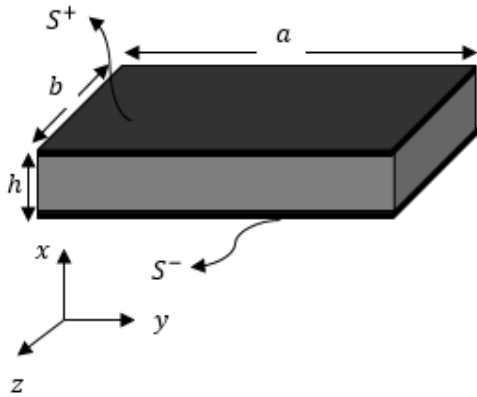
### ۳ همگن‌سازی ورق تابعی مدرج

در این پژوهش، نانو ورق مورد مطالعه از مواد تابعی مدرج می‌باشد که خواص مکانیکی آن به‌طور پیوسته از پایین‌ترین سطح که فلز بوده تا بالاترین سطح که سرامیک است، در راستای ضخامت تغییر

که در رابطه‌ی (۱۱)،  $g$  شاخص ماده یا توان نسبت حجمی ( $g \geq 0$ ) نامیده می‌شود.

#### ۴ تحلیل ارتعاش نانو ورق تابعی مدرج

تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی و با در نظر گرفتن اثر سطح مورد تحلیل قرار گرفته است. هندسه ورق که دارای طول  $a$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  می‌باشد، در شکل ۱ نشان داده شده است. ورق دارای یک حجم میانی و دو سطح در بالا ( $S^+$ ) و پایین ( $S^-$ ) ورق می‌باشد. این دو سطح بالا و پایین برای تحلیل اثر تنش سطح روی رفتار ارتعاشی نانو ورق در نظر گرفته شده است.



شکل ۱ هندسه نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی با دو لایه سطح در بالا و پایین حجم میانی

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی [۳۳]، مثلثاتی [۳۴]، هایپربولیکی [۳۵]، پارابولیکی [۳۶] و همچنین دو تئوری پیشنهادی ارائه شده توسط خورشیدی و کریمی [۳۷]، روابط جابجایی در سه راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  به صورت رابطه‌ی (۱۲) بیان می‌شود.

می‌کند. روش همگن‌سازی موری تاناکا<sup>۱۴</sup> [۳۲] یکی از روش‌های مناسب برای تعیین خواص مؤثر در مواد تابعی مدرج می‌باشد. در این روش، مدول بالک و مدول برشی مؤثر ورق تابعی مدرج توسط مدول‌های بالک و برشی فلز و سرامیک محاسبه می‌شوند. همچنین نسبت حجمی دو ماده، مدول یانگ مؤثر و نسبت پواسون مؤثر بر اساس مدول‌های بالک و برشی مؤثر ورق تابعی مدرج به دست می‌آیند. بر اساس روش موری تاناکا، مدول بالک مؤثر  $K(z)$  و مدول برشی مؤثر  $G(z)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{K(z) - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + V_m \frac{3(K_c - K_m)}{3K_m + 4G_m}} \quad (۶)$$

$$\frac{G(z) - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + V_m \frac{G_c - G_m}{G_m + F(z)}} \quad (۷)$$

که در رابطه‌ی (۷) فوق داریم.

$$F(z) = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6K_m + 12G_m} \quad (۸)$$

با استفاده از روابط به دست آمده، مدول یانگ مؤثر  $E(z)$  و نسبت پواسون مؤثر  $\nu(z)$  به صورت رابطه‌ی (۹) تعریف می‌شوند.

$$E(z) = \frac{9K(z)G(z)}{3K(z) + G(z)} \quad (۹)$$

$$\nu(z) = \frac{3K(z) + 2G(z)}{6K(z) + 2G(z)}$$

که در رابطه‌ی (۹) فوق،  $V_c$  و  $V_m$  به ترتیب نسبت حجمی سرامیک و فلز می‌باشند و رابطه‌ی بین آن‌ها به صورت رابطه‌ی (۱۰) می‌باشد.

$$V_c + V_m = 1 \quad (۱۰)$$

که در رابطه‌ی (۱۰) داریم.

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + 0.5\right)^g \quad (۱۱)$$

<sup>۱۴</sup> Mori-Tanaka Method

که در روابط (۱۳) و (۱۴) با  $E_1$ ،  $E_2$  و  $E_3$  به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌شوند.

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{df_i(z)}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{df_i(z)}{dz} \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

روابط ساختاری بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی و تئوری سطح گرتین-مرداچ برای حجم میانی و دو سطح بالا و پایین مطابق تانسور رابطه‌ی (۱۶) می‌باشند.

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma^b = \bar{C} \bar{\varepsilon} + \bar{\tau} \bar{w}_1 \quad (16)$$

$$u = \bar{T} q$$

$$u = \{u \quad v \quad w\}^T$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z & 0 & f_i(z) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -z & 0 & f_i(z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$q = \left\{ u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \phi \quad \psi \right\}^T$$

که در این رابطه  $w_0$  و  $v_0$ ،  $u_0$  توابع جابجایی لایه‌ی میانی ورق به ترتیب در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  هستند. همچنین  $\phi$  و  $\psi$  اینرسی‌های دورانی به ترتیب حول محورهای  $x$  و  $y$  می‌باشند. همچنین تابع  $f_i(z)$  برای تئوری‌های مختلف در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱ تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی اصلاح شده	
$f_i(z)$	تئوری
$ze^{-2(\frac{z}{h})^2}$	تئوری تغییر شکل برشی نمایی [۳۳]
$\frac{h}{\pi} \text{Sin}\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی <sup>۱۵</sup> [۳۴]
$h \text{Sinh}\left(\frac{z}{h}\right) - z \text{Cosh}\left(\frac{1}{2}\right)$	تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیکی <sup>۱۶</sup> [۳۵]
$z\left(\frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2}\right)$	تئوری تغییر شکل برشی پارابولیکی <sup>۱۷</sup> [۳۶]
$z\left(\frac{3}{h} - \frac{4z^2}{h^3}\right)$	پیشنهاد اول [۳۷]
$z\left(\frac{1}{2} - \frac{2z^2}{h^3} - \frac{8z^4}{5h^5}\right)$	پیشنهاد دوم [۳۷]

با فرض روابط کرنش-جابجایی خطی، تانسور کرنش مانند روابط (۱۳) و (۱۴) به دست می‌آیند.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 - z \bar{\varepsilon}_2 + f_i(z) \bar{\varepsilon}_3 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= E_1 q \\ \bar{\varepsilon}_2 &= E_2 q \\ \bar{\varepsilon}_3 &= E_3 q \end{aligned} \quad (14)$$

<sup>۱۵</sup> parabolic shear deformation theory

<sup>۱۶</sup> Trigonometric shear deformation theory

<sup>۱۷</sup> Hyperbolic shear deformation theory

$$\bar{w}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}$$

در روابط (۱۸) و (۱۹)  $\sigma^s$ ،  $\tau_s$  و  $\bar{\tau}_s$  به ترتیب مربوط به تانسور تنش حجم میانی، تانسور تنش سطوح، تانسور کرنش و تانسور تنش باقی مانده سطح می باشند.  $\bar{C}$  و  $\bar{C}^s$  نیز به ترتیب تانسور ضرایب مربوط به خواص الاستیسیته‌ی حجم میانی و دو سطح بالا و پایین هستند که در این تانسورها  $A = (\lambda_s + 2\mu_s)$  و  $\lambda$  و  $\mu$  نیز ثوابت لامه می باشند که به صورت رابطه‌ی (۲۰) تعریف می شوند.

$$\lambda = \frac{Ev}{1-\nu^2} \quad (20)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

در تئوری کلاسیک ورق‌ها فرض شده است که  $\sigma_{zz}$  در مقایسه با سایر مؤلفه‌های تنش کوچک بوده و قابل صرف نظر کردن است. اما بر اساس تئوری سطح گرتین-مرداچ  $\sigma_{zz}$  نادیده گرفته نمی شود. لیو و همکاران [۳۸] رابطه‌ی زیر را برای بیان تغییرات  $\sigma_{zz}$  در راستای ضخامت برای نانو ورق‌ها ارائه داده اند.

$$\sigma_{zz} = \frac{\left( \frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z^s}{\partial t^2} \right) \Big|_{s^+} - \left( \frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z^s}{\partial t^2} \right) \Big|_{s^-}}{2} \quad (21)$$

$$+ \frac{\left( \frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z^s}{\partial t^2} \right) \Big|_{s^+} - \left( \frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^s}{\partial y} - \rho_s \frac{\partial^2 u_z^s}{\partial t^2} \right) \Big|_{s^-}}{h}$$

که عبارت (۲۱) با توجه به رابطه‌ی  $\sigma_{\alpha z}^s = \tau_s u_{z,\alpha}$  (۲۱) به صورت رابطه‌ی (۲۲) تبدیل می شود.

$$(1 - \bar{\mu} \nabla^2) \sigma^s = \bar{\tau}_1^s + \bar{C}^s \bar{\varepsilon} + \bar{\tau}_2^s \bar{w}_2 \quad (17)$$

در عبارت‌های (۱۶) و (۱۷)،  $\bar{\mu}$  پارامتر غیر محلی مربوط به تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی می باشد. که در این روابط داریم:

$$\sigma^b = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx}^b \\ \sigma_{yy}^b \\ \sigma_{xy}^b \\ \sigma_{xz}^b \\ \sigma_{yz}^b \end{array} \right\} ; \quad \bar{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{array} \right\}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 \\ Sym. & & & & 2\mu \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\bar{\tau} = \frac{2\nu}{(1-\nu)h} \begin{bmatrix} \tau_s & \tau_s & \rho_s \\ \tau_s & \tau_s & \rho_s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w}_1 = z \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{array} \right\}$$

$$\sigma^s = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx}^s \\ \sigma_{yy}^s \\ \frac{\sigma_{xy}^s + \sigma_{yx}^s}{2} \\ \sigma_{xz}^s \\ \sigma_{yz}^s \end{array} \right\} ; \quad \bar{\tau}_1^s = \begin{bmatrix} \tau_s \\ \tau_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}^s = \begin{bmatrix} A - \tau_s & (\lambda_s + \tau_s) & 0 & 0 & 0 \\ & A - \tau_s & 0 & 0 & 0 \\ & & (2\mu_s - \tau_s) - \tau_s & 0 & 0 \\ & & & 2\mu_s & 0 \\ Sym. & & & & 2\mu_s \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{\tau}_2^s = \begin{bmatrix} \tau_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \tau_s & 0 & 0 & 0 \\ & & \tau_s & 0 & 0 \\ & & & \tau_s & 0 \\ Sym. & & & & \tau_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} N^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^b dz \\ M^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^b z dz \\ R^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^b f_i(z) dz \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} Q^b &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^b \frac{df_i(z)}{dz} dz \\ N^{s\pm} &= \sigma^s |_{z=\pm\frac{h}{2}}; M^{s\pm} = \sigma^s z |_{z=\pm\frac{h}{2}} \\ R^{s\pm} &= \sigma^s f_i(z) |_{z=\pm\frac{h}{2}} \\ Q^{s\pm} &= \sigma^s \frac{df_i(z)}{dz} |_{z=\pm\frac{h}{2}} \end{aligned} \quad (28)$$

#### ۲-۴ انرژی جنبشی

حساب تغییرات انرژی جنبشی نیز برای حجم میانی و دو سطح بالا و پایین به صورت رابطه‌ی (۲۹) تعریف می‌شود [۲۴].

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_V \rho \dot{u} \delta \dot{u}^T dV + \int_{s^+} \rho_s \dot{u} \delta \dot{u}^T ds^+ \\ &\quad + \int_{s^-} \rho_s \dot{u} \delta \dot{u}^T ds^- \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_V \bar{T} \rho \bar{T}^T \dot{q} \delta \dot{q}^T dV \\ &+ \int_{s^+} \bar{T} \rho_s \bar{T}^T \dot{q} \delta \dot{q}^T ds^+ \\ &+ \int_{s^-} \bar{T} \rho_s \bar{T}^T \dot{q} \delta \dot{q}^T ds^- \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_S I^b \dot{q} \delta \dot{q}^T dS \\ &\quad + \int_{s^+} I^{s^+} \dot{q} \delta \dot{q}^T ds^+ \\ &\quad + \int_{s^-} I^{s^-} \dot{q} \delta \dot{q}^T ds^- \end{aligned} \quad (31)$$

$$\delta T = \int_S (I^b + I^{s^+} + I^{s^-}) \dot{q} \delta \dot{q}^T dS \quad (32)$$

که در روابط (۲۹) تا (۳۲) داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{2z}{h} \left( \tau_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \tau_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

#### ۱-۴ انرژی کرنشی

حساب تغییرات انرژی کرنشی برای حجم میانی و دو سطح بالا و پایین به صورت رابطه‌ی (۲۳) تعریف می‌شود [۲۴].

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \sigma^b \delta \bar{\epsilon}^T dV + \int_{s^+} \sigma^s \delta \bar{\epsilon}^T ds^+ \\ &\quad + \int_{s^-} \sigma^s \delta \bar{\epsilon}^T ds^- \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_S N^b \delta \bar{\epsilon}_1^T - M^b \delta \bar{\epsilon}_2^T + R^b \delta \bar{\epsilon}_3^T \\ &\quad + Q^b \delta q^T dS \\ &+ \int_{s^+} N^{s^+} \delta \bar{\epsilon}_1^T - M^{s^+} \delta \bar{\epsilon}_2^T + R^{s^+} \delta \bar{\epsilon}_3^T \\ &\quad + Q^{s^+} \delta q^T ds^+ \\ &+ \int_{s^-} N^{s^-} \delta \bar{\epsilon}_1^T - M^{s^-} \delta \bar{\epsilon}_2^T + R^{s^-} \delta \bar{\epsilon}_3^T \\ &\quad + Q^{s^-} \delta q^T ds^- \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_S E_1 (N^b + N^{s^+} + N^{s^-}) \delta q^T \\ &\quad - E_2 (M^b + M^{s^+} \\ &\quad + M^{s^-}) \delta q^T + E_3 (R^b \\ &\quad + R^{s^+} + R^{s^-}) \delta q^T \\ &\quad + (Q^b + Q^{s^+} \\ &\quad + Q^{s^-}) \delta q^T dS \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_S \delta q^T (E_1 (N^b + N^{s^+} + N^{s^-}) \\ &\quad - E_2 (M^b + M^{s^+} \\ &\quad + M^{s^-}) + E_3 (R^b \\ &\quad + R^{s^+} + R^{s^-}) + (Q^b \\ &\quad + Q^{s^+} + Q^{s^-})) dS \end{aligned} \quad (26)$$

در روابط (۲۳) تا (۲۶) بالا داریم:

$$\int_0^t \int_S \delta q^T \left( (I^b + I^{s^+} + I^{s^-}) \dot{q} \delta \dot{q}^T \right. \\ \left. - E_1(N^b + N^{s^+} + N^{s^-}) \right. \\ \left. - E_2(M^b + M^{s^+} + M^{s^-}) \right. \\ \left. + E_3(R^b + R^{s^+} + R^{s^-}) \right. \\ \left. + (Q^b + Q^{s^+} + Q^{s^-}) \right) dS dt = 0 \quad (36)$$

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی نانو ورق تابعی مدرج از روش حل گلوکین استفاده شده است. برای این منظور توابع سعی به صورت روابط (37) و (38) تعریف می‌شوند. در رابطه (37) توابع سعی شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده متحرک<sup>۱۸</sup> (SSM) و در رابطه (38) توابع سعی شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده غیر متحرک<sup>۱۹</sup> (SSI) را ارضا می‌کنند [۲].

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t} \\ V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) e^{i\Omega t} \\ W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t} \quad (37) \\ \phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t} \\ \psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) e^{i\Omega t}$$

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \sin(2\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t} \quad (38) \\ V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin(\gamma x) \sin(2\beta y) e^{i\Omega t}$$

$$I^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{T} \rho \bar{T}^T dz \quad (33) \\ I^{s^{\pm}} = \bar{T} \rho_s \bar{T}^T \Big|_{z=\pm\frac{h}{2}}$$

### ۳-۴ اصل همیلتون

از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حرکت استفاده شده است که این اصل طبق رابطه (34) تعریف می‌شود.

$$\int_0^t (\delta T + \delta W - \delta U) dt = 0 \quad (34)$$

در رابطه (34)،  $W$  بیان‌کننده کار انجام‌شده توسط نیروی خارجی،  $U$  انرژی کرنشی و  $T$  انرژی جنبشی می‌باشد. در مقاله حاضر به دلیل اینکه ارتعاش آزاد نانو ورق‌های تابعی مدرج مورد بررسی قرار گرفته است، کار نیروهای خارجی برابر با صفر می‌باشد. حال با جایگذاری روابط مربوط به انرژی کرنشی و جنبشی در رابطه (34) داریم:

$$\int_0^t \int_S (I^b + I^{s^+} + I^{s^-}) \dot{q} \delta \dot{q}^T \delta q^T \\ - \delta q^T (E_1(N^b + N^{s^+} + N^{s^-}) - E_2(M^b + M^{s^+} + M^{s^-}) \\ + E_3(R^b + R^{s^+} + R^{s^-}) + (Q^b + Q^{s^+} + Q^{s^-})) dS dt = 0 \quad (35)$$

<sup>۱۸</sup> Simply supported immovable

<sup>۱۹</sup> Simply supported movable

سپس به تحلیل نتایج جدید برای نانو ورق تابعی مدرج با در نظر گرفتن اثر سطح پرداخته شده است.

## ۵-۱- اعتبار سنجی

در ابتدا پیش از ارائه نتایج جدید جهت اعتبار سنجی پاسخ‌های به دست آمده در این تحقیق این پاسخ‌ها با برخی مراجع معتبر مقایسه شده‌اند. جنس نانو ورق در این قسمت  $Al/Al_2O_3$  در نظر گرفته شده که خواص این ماده در جدول ۲ ارائه شده است. در جدول ۳ نتایج به دست آمده با مرجع [۲۴] مقایسه شده‌اند. در مرجع [۲۴] از تئوری تغییر شکل برشی نمایی استفاده شده است و فرکانس‌های طبیعی از روش حل ناویر به دست آمده‌اند.

در این جدول ورق دارای طول  $a = 10nm$  و عرض  $b = 10nm$  در نظر گرفته شده و تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل نسبت طول به عرض  $a/b$ ، نسبت طول به ضخامت  $a/h$ ، پارامتر غیر محلی  $\bar{\mu}$  و اندیس توانی  $g$  روی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. همچنین در این جدول فرکانس‌های طبیعی با استفاده از رابطه  $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$  بی بعد شده‌اند.

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t}$$

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) e^{i\Omega t}$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) e^{i\Omega t}$$

که در روابط (۳۷) و (۳۸)  $W_{mn}$ ،  $\phi_{mn}$  و  $\psi_{mn}$  ضرایب سری فوریه و  $\gamma = n\pi/a$  و  $\beta = m\pi/b$  می‌باشند. همچنین در این روابط  $i$  نماد اعداد مختلط می‌باشد. پس از ساده‌سازی، معادلات ماتریسی به فرم بسته به صورت رابطه‌ی (۳۹) ارائه شده که با حل آن فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آیند.

$$([K] - [M]\Omega^2) = 0 \quad (39)$$

که  $[K]$  ماتریس سفتی،  $[M]$  ماتریس جرم و  $\Omega$  فرکانس طبیعی نانو ورق تابعی مدرج می‌باشد.

## ۵ نتایج عددی

در این قسمت ابتدا جهت اعتبار سنجی این مقاله و تأیید صحت پاسخ‌های به دست آمده، نتایج با مراجع معتبر مقایسه شده است.

جدول ۲ خواص مواد

ماده	خواص						
	$E(GPa)$	$\rho(Kg/m^3)$	$\nu$	$\rho_s(Kg/m^3)$	$\tau_s(N/M)$	$\lambda_s(N/M)$	$\mu_s(N/M)$
Aluminum (Al)	70	2707	0.3	$5.46 \times 10^{-7}$	0.9108	6.842	0.376
Alumina ( $Al_2O_3$ )	380	3800	0.3	...	...	...	...
Silicon (Si)	210	2331	0.3	$3.17 \times 10^{-7}$	0.6048	-4.488	-2.774

جدول ۳ فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نانو ورق تابعی مدرج مربعی با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده متحرک (SSM) با جنس  $Al/Al_2O_3$  به ابعاد  $b = 10nm$

$\bar{\mu}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{h}{a}$	$g = 0$		$g = 5$		$g = 10$	
			حاضر	مرجع [۲۴] (ESDT)	حاضر	مرجع [۲۴] (ESDT)	حاضر	مرجع [۲۴] (ESDT)
0.0	0.5	0.2	0.137704	0.1378	0.089016	0.0890	0.0856217	0.0856
		0.1	0.0365216	0.0365	0.0239098	0.0239	0.0231089	0.0231
	1.0	0.2	0.211381	0.2310	0.135609	0.1356	0.1330052	0.1300
		0.1	0.0577036	0.0577	0.0376675	0.0377	0.0363661	0.0364
0.1	0.5	0.2	0.129922	0.1299	0.083986	0.0839	0.0807834	0.0808
		0.1	0.0344579	0.0345	0.0225587	0.0226	0.0218031	0.0218
	1.0	0.2	0.193174	0.1932	0.123928	0.1239	0.11885	0.1188
		0.1	0.0527333	0.0527	0.034423	0.0344	0.0332337	0.0332
0.2	0.5	0.2	0.11268	0.1127	0.0728397	0.0728	0.0700622	0.0700
		0.1	0.0298848	0.0299	0.0195648	0.0196	0.0189095	0.0189
	1.0	0.2	0.158013	0.1580	0.101371	0.1014	0.0972169	0.0972
		0.1	0.0431349	0.0431	0.0281574	0.0282	0.0271846	0.0272
0.3	0.5	0.2	0.0947917	0.0948	0.0612764	0.0613	0.0589398	0.0589
		0.1	0.0251406	0.0251	0.0164589	0.0165	0.0159076	0.0159
	1.0	0.2	0.126857	0.1269	0.0813838	0.0814	0.0780486	0.0780
		0.1	0.0346299	0.0346	0.0226056	0.0226	0.0218246	0.0218
0.4	0.5	0.2	0.0798511	0.0798	0.0516183	0.0516	0.04965	0.0496
		0.1	0.021178	0.0212	0.0138647	0.0139	0.0134003	0.0134
	1.0	0.2	0.10366	0.1037	0.0665017	0.0665	0.0637763	0.0638
		0.1	0.0282974	0.0283	0.0184719	0.0185	0.0178337	0.0178

نسبت طول به ضخامت و پارامتر غیر محلی ارائه شده‌اند. فرکانس‌های ارائه شده در این جدول با در نظر گرفتن شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده برای نانو ورق به دست آمده‌اند. در این جدول بیشترین و کمترین اختلاف بین نتایج حاصل از تئوری تغییر شکل برشی نمایی و تئوری‌های موجود در مرجع [۳۹] محاسبه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود بیشترین و کمترین اختلاف تئوری نمایی به ترتیب با تئوری‌های کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد. دلیل وجود اختلاف بین تئوری نمایی و کلاسیک در نحوه توزیع کرنش‌های برشی عرضی می‌باشد. به صورتیکه در تئوری کلاسیک تنش‌های برشی عرضی در

در جدول ۴ نیز نتایج به دست آمده توسط تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده مختلف در این تحقیق با نتایج ارائه شده توسط آقابابایی و ردی [۳۹] مقایسه شده‌اند. در مرجع [۳۹] نتایج با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که نتایج ارائه شده در جداول ۳ و ۴ جهت اعتبار سنجی، بدون در نظر گرفتن اثر سطح می‌باشند. با توجه به این جداول و مقایسه پاسخ‌های به دست آمده در تحقیق حاضر با مراجع معتبر مشاهده می‌شود که بین جواب‌های ارائه شده در این مقاله و نتایج مراجع مطابقت خوبی وجود دارد. در جدول ۴ نتایج به ازای پارامترهای مختلف مانند

سطوح آزاد ورق صفر در نظر گرفته نشده‌اند بنابراین نیاز به ضریب تصحیح برشی است که این ضریب خود باعث ایجاد خطا در پاسخ‌ها می‌شود. همچنین اختلاف بین نتایج بدست آمده از تغییر شکل برشی مرتبه سوم و تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده بدلیل استفاده از

توابع مختلف جهت توصیف نحوه ی توزیع تنش برشی در این تئورها می‌باشد. علاوه بر موارد فوق، لازم به ذکر است که دو تئوری پیشنهادی ارائه شده نیز شرایط تنش برشی صفر را در سطوح بالا و پایین ورق را ارضا می‌کنند.

جدول ۴ مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/G}$ ) برای نانو ورق مستطیلی با مرجع [۳۹] ( $a = 10 \text{ nm}, E = 30 \times 10^6, \nu = 0.3, \rho = 1$ )

$\frac{a}{h}$	$\bar{\mu}$	حاضر (تئوری) تغییر شکل برشی (نمایی)	حاضر (تئوری) تغییر شکل برشی (مثلثاتی)	حاضر (تئوری) تغییر شکل برشی (پارابولیکی)	حاضر (تئوری) تغییر شکل برشی (هایپر بولیکی)	تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم [۳۹]	تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۳۹]	درصد اختلاف		
								تئوری کلاسیک [۳۹]	تئوری نمایی با تئوری مرتبه اول	درصد اختلاف تئوری نمایی با تئوری کلاسیک
10	0	0.0930443	0.093033	0.0930291	0.0930291	0.0935	0.0930	0.0963	0.05	3.5
	1	0.0850298	0.0850195	0.085016	0.085016	0.0854	0.0850	0.0880	0.03	3.49
	2	0.0787836	0.0787741	0.0787708	0.0787708	0.0791	0.0788	0.0816	0.02	3.57
	3	0.0737384	0.0737295	0.0737264	0.0737264	0.0741	0.0737	0.0763	0.05	3.47
	4	0.0695529	0.0695445	0.0695416	0.0695416	0.0699	0.0696	0.0720	0.07	3.52
5	0.0660078	0.0659997	0.065997	0.065997	0.0663	0.0660	0.0683	0.01	3.47	
20	0	0.0238647	0.023864	0.0238638	0.0238638	0.0239	0.0239	0.0241	0.15	0.99
	1	0.0218091	0.0218085	0.0218082	0.0218082	0.0218	0.0218	0.0220	0.04	0.88
	2	0.0202071	0.0202064	0.0202062	0.0202062	0.0202	0.0202	0.0204	0.03	0.95
	3	0.018913	0.0189124	0.0189122	0.0189122	0.0189	0.0189	0.0191	0.07	0.99
	4	0.0178395	0.0178389	0.0178388	0.0178388	0.0179	0.0178	0.0180	0.22	0.90
5	0.0169302	0.0169297	0.0169295	0.0169295	0.0170	0.0169	0.0171	0.18	1.00	

جنس سیلیکن و سطح پایینی از جنس آلومینیوم بوده است. خواص این دو ماده برای قسمت میانی ورق و دو سطح بالا و پایین در جدول ۲ ارائه شده است.

در جدول ۵ تأثیر تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی اصلاح شده مانند تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی، مثلثاتی، پارابولیکی، هایپر بولیکی و همچنین دو تئوری جدید که در این مقاله تحت عنوان پیشنهاد اول و دوم مشخص شده‌اند، روی فرکانس طبیعی نانو ورق بررسی شده است. در این جدول ورق با طول  $a = 10 \text{ nm}$ ، عرض  $b = 10 \text{ nm}$  و اندیس توانی  $g = 0$  نظر گرفته شده است. همان‌طور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود بدون در نظر گرفتن "پیشنهاد اول" و "پیشنهاد دوم" فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌دست‌آمده توسط تئوری تغییر شکل برشی پارابولیکی کمتر از فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌دست‌آمده توسط سایر تئوری‌ها می‌باشد.

## ۵-۲ نتایج جدید

نتایج در این بخش با در نظر گرفتن اثر تنش باقی‌مانده سطح ( $\tau_s$ )، چگالی سطح ( $\rho_s$ ) و سایر خواص مرتبط با سطح مانند  $\mu_s$  و  $\lambda_s$  و برای شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده متحرک (SSM) و چهار طرف تکیه‌گاه ساده غیر متحرک (SSI) ارائه شده‌اند. همچنین جنس نانو ورق تابعی مدرج  $Al/Si$  در نظر گرفته شده است. در واقع بخش بالایی نانو ورق که سرامیکی می‌باشد از جنس سیلیکن ( $Si$ ) بوده و بخش پایینی ورق که فلزی می‌باشد از جنس آلومینیوم ( $Al$ ) بوده است. همچنین جهت بررسی اثر سطح نیز دوسطحی که در بالا و پایین ورق در نظر گرفته شده‌اند نیز از جنس سیلیکن و آلومینیوم بوده، به این صورت که سطح بالایی ورق از

به‌وسیله‌ی این تئوری‌ها، بسط  $f_i(z)$  مربوط به هر تئوری را به دست می‌آوریم تا همه‌ی این عبارات‌ها به شکل چندجمله‌ای‌هایی ظاهر شوند که مقایسه‌ی آن‌ها ساده‌تر شود. بسط  $f_i(z)$  برای تئوری‌های بررسی‌شده در این مقاله در روابط (۴۰) تا (۴۵) نمایش داده‌شده‌اند.

همچنین تئوری تغییر شکل برشی نمایی فرکانس طبیعی بی‌بعد را بزرگ‌تر از سایر تئوری‌ها به دست می‌دهد. در صورتی که با در نظر گرفتن "پیشنهاد اول" و "پیشنهاد دوم" مشخص می‌شود که "پیشنهاد اول" نتایج را از تئوری تغییر شکل برشی نمایی نیز بزرگ‌تر پیش‌بینی می‌کند و "پیشنهاد دوم" نیز نتایج را از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیکی کمتر پیش‌بینی می‌کند. اکنون برای درک بهتر این اختلاف‌های موجود در پاسخ‌های به‌دست‌آمده

$$z \left( \text{Exp} \left[ (-2) \left( \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) \right] \right) = z - \frac{2z^3}{h^2} + \frac{2z^5}{h^4} - \frac{4z^7}{3h^6} + \frac{2z^9}{3h^8} + \dots \quad (40)$$

$$\left( \frac{h}{\pi} \right) \text{Sin} \left[ \frac{\pi z}{h} \right] = z - \frac{\pi^2 z^3}{6h^2} + \frac{\pi^4 z^5}{120h^4} - \frac{\pi^6 z^7}{5040h^6} + \frac{\pi^8 z^9}{362880h^8} + \dots \quad (41)$$

$$h \text{Sinh} \left[ \frac{z}{h} \right] - z \text{Cosh}[0.5] = -0.127626z + \frac{z^3}{6h^2} + \frac{z^5}{120h^4} + \frac{z^7}{5040h^6} + \frac{z^9}{362880h^8} + \dots \quad (42)$$

$$z \left( \frac{5}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) = \frac{5z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2} + \dots \quad (43)$$

$$z \left( \frac{3}{h} - \frac{4z^2}{3h^3} \right) = \frac{3z}{h} - \frac{4z^3}{3h^3} + \dots \quad (44)$$

$$z \left( \frac{1}{h} - \frac{2z^2}{h^3} - \frac{8z^4}{5h^5} \right) = \frac{z}{h} - \frac{2z^3}{h^3} - \frac{8z^5}{5h^5} + \dots \quad (45)$$

هارمونیکی سریع‌تر از تئوری نمایی است که این پدیده باعث تغییر در توزیع تنش برشی عرضی می‌گردد.

با توجه به روابط بالا به‌سادگی می‌توان دریافت که ضرایب ثابت و نرخ کاهش ضرایب در شش رابطه بالا با یکدیگر متفاوت می‌باشند. که این تفاوت‌ها سبب تغییر در کرنش برشی عرضی در این تئوری‌ها می‌شود. به‌عنوان مثال نرخ کاهش ضرایب ثابت در تئوری

جدول ۵. تأثیر تئوری‌های اصلاح‌شده‌ی مختلف تغییر شکل برشی روی فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج مربعی با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده متحرک (SSM)

$\bar{\mu}$	(m,n)	تئوری تغییر شکل برشی نمایی	تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی	تئوری تغییر شکل برشی پارابولیکی	تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیکی	پیشنهاد اول	پیشنهاد دوم
0	(1,1)	0.047881	0.0478771	0.0478769	0.0478771	0.0483206	0.0474678
	(1,2)	0.11395	0.11393	0.11393	0.113931	0.115397	0.113969
0.1	(1,1)	0.0437568	0.0437532	0.043753	0.0437532	0.0441585	0.0433792
	(1,2)	0.0932426	0.0932266	0.0932266	0.0932274	0.0944265	0.0932582

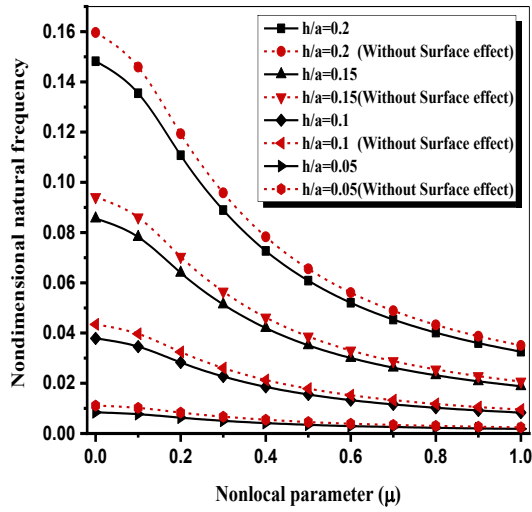
0.2	(1,1)	0.0357923	0.0357894	0.0357892	0.0357893	0.0361208	0.0354834
	(1,2)	0.0660769	0.0660655	0.0660655	0.0660661	0.0669159	0.0660879
0.3	(1,1)	0.0287351	0.0287327	0.0287326	0.0287327	0.0289989	0.0284871
	(1,2)	0.0488497	0.0488413	0.0488413	0.0488417	0.04947	0.0488579
0.4	(1,1)	0.0234805	0.0234786	0.0234785	0.0234785	0.023696	0.0232779
	(1,2)	0.0382054	0.0381988	0.0381988	0.0381991	0.0386905	0.0382118
0.5	(1,1)	0.0196544	0.0196528	0.0196527	0.0196528	0.0198349	0.0194848
	(1,2)	0.0312022	0.0311968	0.0311968	0.0311971	0.0315984	0.0312074

جدول ۶ تغییرات چهار فرکانس اول بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج در برابر ضخامت با در نظر گرفتن اثر سطح با شرایط ( $b/a = 1, g = 1, \bar{\mu} = 0$ ) تحت شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده متحرک (SSM)

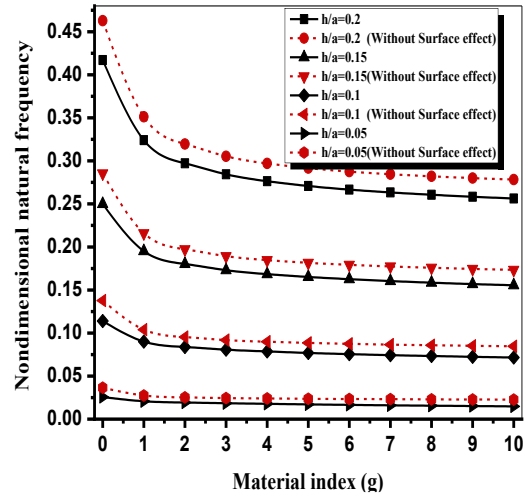
$h/a$	$(m, n)$			
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
0.2	0.148221	0.324108	0.324108	0.392189
0.15	0.0855915	0.195242	0.195242	0.286362
0.1	0.037841	0.0900763	0.0900763	0.137996
0.08	0.0236955	0.057284	0.057284	0.0888734
0.05	0.0084133	0.020736	0.020736	0.0327258

شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر غیر محلی فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق به صورت پیوسته کاهش می‌یابد. در حقیقت با افزایش پارامتر غیر محلی، انرژی کرنشی کاهش می‌یابد در نتیجه از صلبیت ورق نیز کاسته می‌شود که این به معنای کاهش سفتی ورق بوده که موجب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است که در نظر گرفتن اثر سطح باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق می‌شود. در واقع در نظر گرفتن اثر سطح باعث افزایش تغییر شکل ورق شده و در نتیجه منجر به کاهش سختی ورق و کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق می‌شود. در شکل‌های ۴ و ۵ نیز  $a/b = 1$  و  $h/a = 0.1$  فرض شده‌اند. در این شکل‌ها تأثیر پارامتر غیر محلی و اندیس توانی جهت درک بهتر در قالب یک شکل سه‌بعدی نمایش داده شده است و همان‌طور که در قسمت قبل نیز ذکر شد افزایش این دو پارامتر سبب کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق می‌شود.

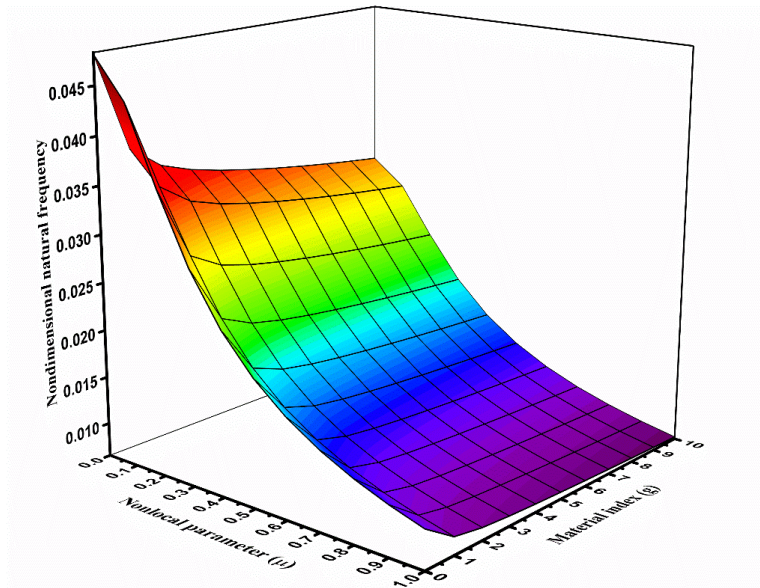
در جدول ۶، چهار فرکانس اول نانو ورق تابعی مدرج نشان داده شده است. در این جدول نتایج برای نانو ورق مربعی ارائه شده است به همین دلیل همان‌طور که ملاحظه می‌گردد مود های (۱،۲) و (۲،۱) با یکدیگر برابر می‌باشند. در شکل‌های ۲ و ۳ تأثیر تغییرات اندیس توانی ( $g$ )، پارامتر غیر محلی ( $\mu$ ) و نسبت ضخامت به طول ( $h/a$ ) روی فرکانس طبیعی نانو ورق تابعی مدرج بررسی شده است. همچنین در این شکل‌ها تفاوت نتایج به دست آمده بدون در نظر گرفتن اثر سطح و با در نظر گرفتن اثر سطح نمایش داده شده است. در شکل ۲ نسبت طول به عرض نانو ورق  $b/a = 0.5$  و پارامتر غیر محلی  $\mu = 0$  فرض شده است. در این شکل ملاحظه می‌شود که با افزایش اندیس توانی ( $g$ ) فرکانس طبیعی نانو ورق کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش اندیس توانی خواص ورق به فلز نزدیک‌تر می‌شود که این امر سبب کاهش سفتی ورق شده که در نهایت به کاهش فرکانس طبیعی منجر می‌شود. در شکل ۳ نسبت طول به عرض نانو ورق  $b/a = 1$ ، اندیس توانی  $g = 1$  و پارامتر غیر محلی دارای مقادیر  $\mu = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1$  فرض



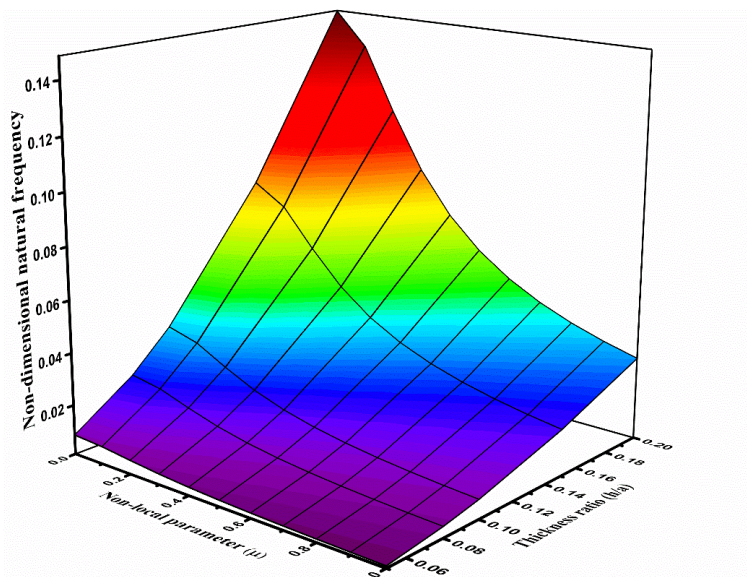
شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج به‌صورت تابعی از پارامتر غیر محلی بی‌بعد و ضخامت برای شرط مرزی (SSM)



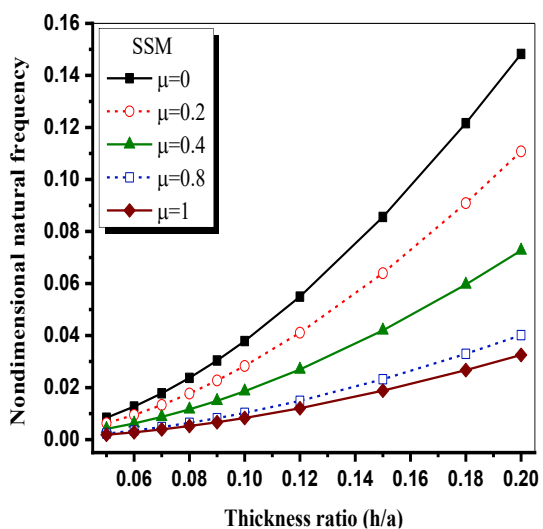
شکل ۴ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج به‌صورت تابعی از اندیس توانی و ضخامت برای شرط مرزی (SSM)



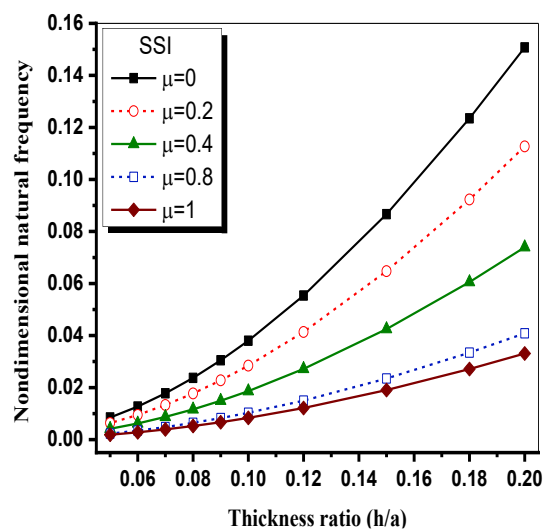
شکل ۴ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج به‌صورت تابعی از پارامتر غیر محلی بی‌بعد و اندیس توانی برای شرط مرزی (SSM)



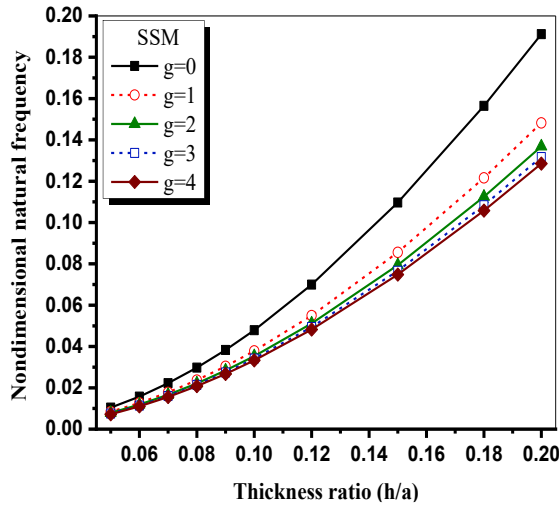
شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج به صورت تابعی از پارامتر غیر محلی بی‌بعد و ضخامت برای شرط مرزی (SSM)



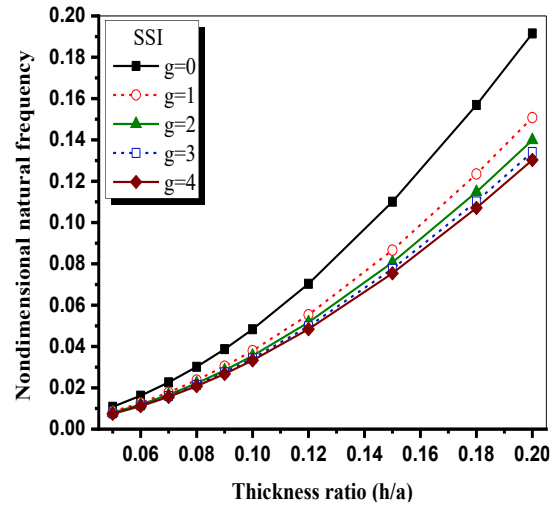
شکل ۷ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی به صورت تابعی از پارامتر غیر محلی بی‌بعد و نسبت ضخامت به طول ( $h/a$ ) برای شرط مرزی (SSM)



شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی به صورت تابعی از پارامتر غیر محلی بی‌بعد و نسبت ضخامت به طول ( $h/a$ ) برای شرط مرزی (SSI)



شکل ۹ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی به صورت تابعی از اندیس توانی و نسبت ضخامت به طول ( $h/a$ ) برای شرط مرزی (SSM)



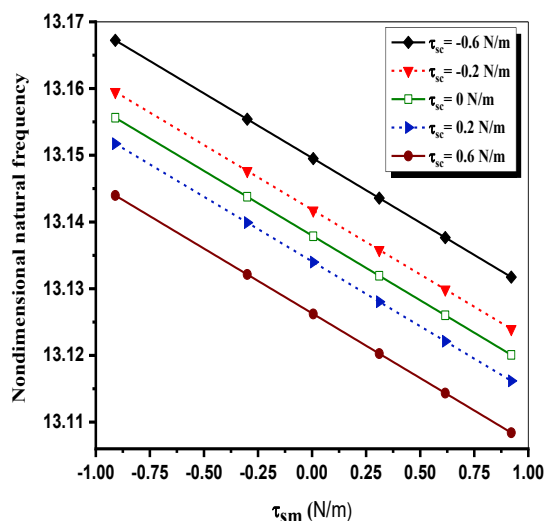
شکل ۸ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ( $\Omega = \omega h \sqrt{\rho/E_c}$ ) نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی به صورت تابعی از اندیس توانی و نسبت ضخامت به طول ( $h/a$ ) برای شرط مرزی (SSI)

در شکل‌های ۸ و ۹ نیز تأثیر اندیس توانی ( $g$ ) و تأثیر نسبت ضخامت به طول ( $h/a$ ) به صورت هم‌زمان نشان داده شده است. در این شکل‌ها نیز مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ( $h/a$ ) تأثیر اندیس توانی برجسته می‌شود.

در شکل‌های ۱۰ تا ۱۳ به تحلیل تأثیر پارامترهای مختلف سطح مانند تنش باقیمانده سطح ( $\tau_s$ ) و ثابت الاستیسیته‌ی سطح ( $\mu_s$  و  $\lambda_s$ ) روی فرکانس طبیعی نانو ورق تابعی مدرج پرداخته شده است. در این شکل‌ها نسبت طول به عرض نانو ورق  $a/b = 1$ ، نسبت ضخامت به طول  $h/a = 1$ ، پارامتر غیر محلی  $\mu = 0.1$  و اندیس توانی  $g = 0$  فرض شده‌اند و فرکانس‌های طبیعی ارائه شده در این شکل‌ها با استفاده از رابطه‌ی  $\Omega = \omega \left( \rho_c h a^4 / \left( \frac{1}{12} E_c h^3 \right) \right)^{0.5}$  بی‌بعد شده‌اند. همان‌طور که در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ ملاحظه می‌شود با افزایش تنش باقیمانده‌ی سطح فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش تنش باقیمانده سطح صلبیت ورق کاهش یافته و

در شکل‌های ۶ و ۷ تأثیر نسبت ضخامت به طول ( $h/a$ ) و پارامتر غیر محلی ( $\mu$ ) روی فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق به صورت هم‌زمان بررسی شده است. در این شکل‌ها تأثیر شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده متحرک (SSM) و چهار طرف تکیه‌گاه ساده غیر متحرک (SSI) نیز مشاهده می‌شود. در این شکل‌ها نسبت طول به عرض نانو ورق  $a/b = 1$  و اندیس توانی  $g = 1$  در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل‌های ۶ و ۷ ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به طول ( $h/a$ )، فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق نیز افزایش می‌یابد. این نتیجه دلالت بر آن دارد که با افزایش نسبت ( $h/a$ ) در حالی که طول ورق ثابت باشد ورق ضخیم‌تر شده که این امر سبب افزایش صلبیت و در نتیجه افزایش سفتی ورق شده که این تغییرات باعث افزایش فرکانس طبیعی نانو ورق نیز می‌شود. نکته‌ی قابل ملاحظه دیگر این است که هرچه نسبت ( $h/a$ ) زیاد می‌شود اثر اندازه خودش را بیشتر نشان می‌دهد و این اثر برجسته‌تر می‌شود.

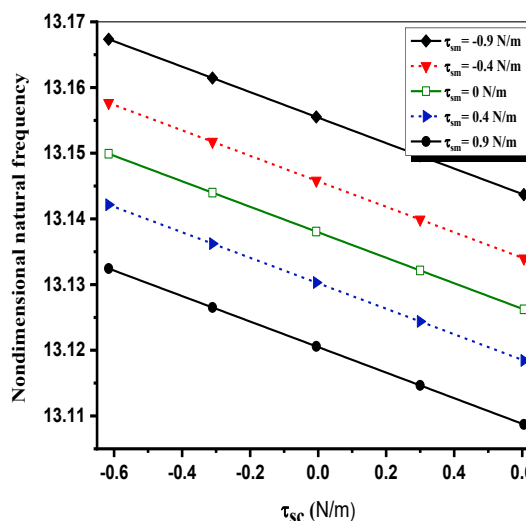
پدیده در نهایت منجر به افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود. همچنین با استدلالی مشابه می‌توان دریافت که کاهش فرکانس طبیعی سیستم به ازای پارامترهای منفی اثر سطح به دلیل کاهش انرژی کرنشی و کاهش سفتی سیستم صورت می‌پذیرد. همچنین با توجه به شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت  $a/b$  فرکانس طبیعی نانو ورق کاهش پیدا می‌کند. در حقیقت با افزایش نسبت  $a/b$  درحالی‌که طول فرق ثابت باشد، عرض ورق کاهش پیدا می‌کند که باعث افزایش درجه آزادی ورق و در نهایت منجر به کاهش فرکانس طبیعی ورق می‌گردد.



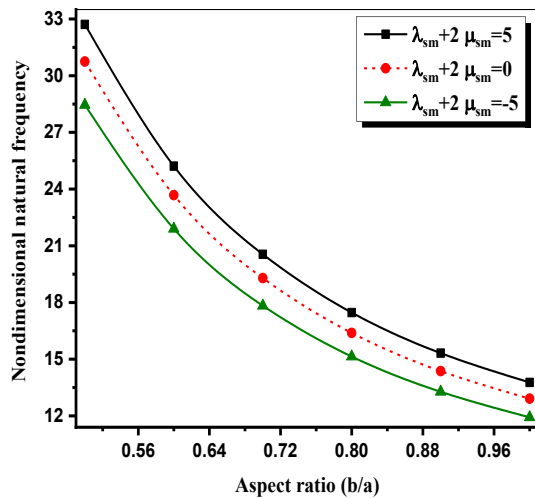
شکل ۱۱ تأثیرات تنش باقیمانده سطح پایینی نانو ورق ( $\tau_{sc}$ ) روی فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی برای شرط مرزی (SSM)

تحریک‌پذیری ورق افزایش می‌یابد به بیان ساده‌تر از سفتی نانو ورق کاسته می‌شود که این امر موجب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود.

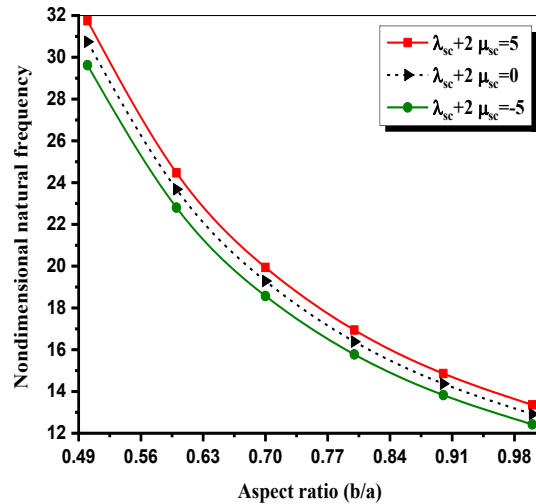
در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی به‌دست‌آمده به ازای مقادیر مثبت پارامترهای سطح بیشتر از فرکانس‌های طبیعی به‌دست‌آمده به ازای مقادیر منفی پارامترهای سطح می‌باشند. دلیل افزایش فرکانس طبیعی نانو ورق با در نظر گرفتن مقادیر مثبت برای پارامترهای الاستیسیته‌ی سطح این است که مثبت بودن این پارامترها سبب افزایش انرژی کرنشی سیستم می‌شود که این امر باعث می‌شود که صلبیت سیستم افزایش یابد و در نتیجه سبب افزایش سفتی نانو ورق شود که این



شکل ۱۰ تأثیرات تنش باقیمانده سطح بالایی نانو ورق ( $\tau_{sc}$ ) روی فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی برای شرط مرزی (SSM)



شکل ۱۳ تأثیرات ثوابت سطح بالایی نانو ورق ( $\lambda_{sm}$  and  $\mu_{sm}$ ) روی فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی برای شرط مرزی (SSM)



شکل ۱۴ تأثیرات ثوابت سطح بالایی نانو ورق ( $\lambda_{sc}$  and  $\mu_{sc}$ ) روی فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی برای شرط مرزی (SSM)

ملاحظه می‌شود که با در نظر گرفتن تأثیرات سطوح نانو ورق، فرکانس‌های به‌دست‌آمده کاهش پیدا می‌کنند. با افزایش تنش باقیمانده‌ی سطح فرکانس طبیعی بی‌بعد نانو ورق کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش تنش باقیمانده سطح صلبیت ورق کاهش یافته و تحریک‌پذیری ورق افزایش می‌یابد به بیان ساده‌تر از سفتی نانو ورق کاسته می‌شود که این امر موجب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود.

فرکانس طبیعی به‌دست‌آمده به ازای مقادیر مثبت ثوابت الاستیسیته‌ی سطح بیشتر از فرکانس‌های طبیعی به‌دست‌آمده به ازای مقادیر منفی پارامترهای سطح می‌باشند. دلیل افزایش فرکانس طبیعی نانو ورق با در نظر گرفتن مقادیر مثبت برای پارامترهای الاستیسیته‌ی سطح این است که مثبت بودن این پارامترها سبب افزایش انرژی کرنشی سیستم می‌شود که این امر باعث می‌شود که صلبیت سیستم افزایش یابد و در نتیجه سبب افزایش سفتی نانو ورق شود که این پدیده در نهایت منجر به افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

## ۶ نتیجه‌گیری

در مقاله‌ی حاضر از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی جهت در نظر گرفتن تأثیر پارامترهای غیر محلی و از تئوری الاستیسیته‌ی سطح جهت بررسی تأثیرات پارامترهای وابسته به سطوح ورق استفاده شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش نانو ورق تابعی مدرج مستطیلی با استفاده از اصل همپلتون به‌دست‌آمده و از روش حل گلرکین جهت حل این معادلات استفاده شده است. با بررسی نتایج به‌دست‌آمده می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

فرکانس طبیعی بی‌بعد با افزایش نسبت طول به عرض ( $a/b$ ) نانو ورق و با فرض ثابت بودن طول نانو ورق، افزایش می‌یابد. این نتیجه دلالت بر آن دارد که بین دو ورق با طول  $a$ ، ضخامت  $h$ ، ورق‌ی که دارای عرض  $b$  کمتری باشد فرکانس طبیعی بی‌بعد بیشتری دارد. زیرا با کاهش عرض در طول ثابت درجه آزادی ورق کاهش می‌یابد که این امر سبب افزایش سفتی ورق و در نتیجه افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق می‌گردد.

با افزایش اندیس توانی، خواص ورق به فلز نزدیک می‌شود و با توجه به کاهش سختی فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. به‌علاوه

## منابع

- [1] A.W. Leissa, The free vibration of rectangular plates, *Journal of sound and vibration*, 31 (1973) 257-293.
- [2] A. Nosier, R.K. Kapania, J.N. Reddy, Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory, *AIAA journal*, 31 (1993) 2335-2346.
- [3] G. Kirchoff, Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 40 (1850) 51-88.
- [4] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. appl. Mech.*, 18 (1951) 31-38.
- [5] P. Bose, J.N. Reddy, Analysis of composite plates using various plate theories-Part 1: Formulation and analytical solutions, *Structural Engineering and Mechanics*, 6 (1998) 583-612.
- [6] P. Bose, J.N. Reddy, Analysis of composite plates using various plate theories-Part 2: Finite element model and numerical results, *Structural Engineering and Mechanics*, 6 (1998) 727-746.
- [7] S. Hosseini-Hashemi, K. Khorshidi, M. Amabili, Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates, *Journal of Sound and Vibration*, 315 (2008) 318-342.
- [8] H. Matsunaga, Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Composite structures*, 82 (2008) 499-512.
- [9] K. Khorshidi, S. Farhadi, Free vibration analysis of a laminated composite rectangular plate in contact with a bounded fluid, *Composite structures*, 104 (2013) 176-186.
- [10] K. Khorshidi, M. Taheri, M. Ghasemi, Sensitivity Analysis of the Vibrating Laminated Composite Rectangular Plates in Interaction with Inviscid Fluid Using EFAST Method, *Mechanics of Advanced Composite Structures*, (2020).
- [11] J.L. Mantari, A.S. Oktem, C.G. Soares, A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates, *International Journal of Solids and Structures*, 49 (2012) 43-53.
- [12] A. Tounsi, M.S.A. Houari, S. Benyoucef, A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aerospace science and technology*, 24 (2013) 209-220.
- [13] K. Khorshidi, A. Fallah, Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 113 (2016) 94-104.
- [14] کوروش خورشیدی، محسن قاسمی، ابوالفضل فلاح، تحلیل کمانش میکرو صفحه مستطیلی تابعی مدرج در محیط حرارتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی با بکارگیری تئوری تنش کوپل اصلاح شده، مکانیک سازه ها و شاره ها، ۸ (۲۰۱۸) ۱۷۹-۱۹۶.
- [15] A. Mahi, A. Tounsi, A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates, *Applied Mathematical Modelling*, 39 (2015) 2489-2508.
- [16] M. Panyatong, B. Chinnaboon, S. Chucheeprakul, Free vibration analysis of FG nanoplates embedded in elastic medium based on second-order shear deformation plate theory and nonlocal elasticity, *Composite Structures*, 153 (2016) 428-441.
- [17] X. Zhao, Y.Y. Lee, K.M. Liew, Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *Journal of sound and Vibration*, 319 (2009) 918-939.
- [18] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour, A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53 (2011) 11-22.
- [19] E.C. Aifantis, Strain gradient interpretation of size effects, in: *Fracture Scaling*, Springer, 1999, pp. 299-314.
- [20] R.A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11 (1962) 385-414.
- [21] A.C. Eringen, D.G.B. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*, 10 (1972) 233-248.
- [22] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics*, 54 (1983) 4703-4710.
- [23] A.C. Eringen, *Nonlocal continuum field theories*, Springer Science & Business Media, 2002.

- [24] K. Khorshidi, T. Asgari, A. Fallah, Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates based on nonlocal exponential shear deformation theory, *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 2 (2015) 79-93.
- [25] K. Khorshidi, M. Ghasemi, M. Karimi, M. Bahrami, Effects of Couple-stress Resultants on Thermo-electro-mechanical Behavior of Vibrating Piezoelectric Micro-plates Resting on Orthotropic Foundation, *Journal of Stress Analysis*, 4 (2019) 125-136.
- [26] J. Kim, J.N. Reddy, Analytical solutions for bending, vibration, and buckling of FGM plates using a couple stress-based third-order theory, *Composite Structures*, 103 (2013) 86-98.
- [27] S. Hosseini-Hashemi, R.A. Arpanahi, S. Rahmanian, A. Ahmadi-Savadkoobi, Free vibration analysis of nano-plate in viscous fluid medium using nonlocal elasticity, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 74 (2019) 440-448.
- [28] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 57 (1975) 291-323.
- [29] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch, Surface stress in solids, *International Journal of Solids and Structures*, 14 (1978) 431-440.
- [30] G.-F. Wang, X.-Q. Feng, Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams, *Applied physics letters*, 90 (2007) 231904.
- [31] F. Ebrahimi, E. Heidari, Surface effects on nonlinear vibration of embedded functionally graded nanoplates via higher order shear deformation plate theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26 (2019) 671-699.
- [32] T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta metallurgica*, 21 (1973) 571-574.
- [33] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory, *Applied and Computational mechanics*, 6 (2012).
- [34] Y.M. Ghugal, A.S. Sayyad, Free vibration of thick orthotropic plates using trigonometric shear deformation theory, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 8 (2011) 229-243.
- [35] K.P. Soldatos, A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, *Acta Mechanica*, 94 (1992) 195-220.
- [36] V. Panc, *Theories of elastic plates*, Springer Science & Business Media, 1975.
- [37] K. Khorshidi, M. Karimi, Analytical modeling for vibrating piezoelectric nanoplates in interaction with inviscid fluid using various modified plate theories, *Ocean Engineering*, 181 (2019) 267-280.
- [38] P. Lu, L.H. He, H.P. Lee, C. Lu, Thin plate theory including surface effects, *International Journal of Solids and Structures*, 43 (2006) 4631-4647.
- [39] R. Aghababaei, J.N. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration*, 326 (2009) 277-289.