



MECHANICS OF SMART STRUCTURES

Available Online at: <http://jmss.qut.ac.ir/>



Free vibration analysis of kagome lattice stiffened cylindrical shells using a modified equivalent stiffness matrix model

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

A. Jafari¹
M. Fadaee²

¹ Master of Science, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Qom University of Technology

² Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Qom University of Technology

* Correspondence

Address: Department of Mechanics, Qom University of Technology, Shahid Khodakaram Street
Qom, Iran, Postal Code: 37181-46645
Phone: 02536641601
Fax: 02536641604
Fadaee@qut.ac.ir

Article History

Received: March 01, 2021
Accepted: June 19, 2021
ePublished: August 3, 2021

ABSTRACT

Free vibration analysis of Kagome lattice cylindrical shells is presented using an improved equivalent stiffness matrix model. The boundary conditions of the shell are simply supported and the classical thin shell theory is considered to obtain the equations of motion. The modified equivalent stiffness matrix of the lattice shell is extracted by collecting stiffness matrix of a simple shell and those of grid-reinforced shell according to their volume fractions. The equations of motion are derived using the Hamilton's principle as well as the Flugge thin shell theory and then are solved by the Navier type solution. The present results are compared by those obtained by a finite element analysis (FEA) in Abaqus software. Comparison results report good accuracy of the present method in comparison with those obtained by the FEA. Finally, effects of various parameters such as shell thickness, width and length of the grids and mode number on the natural frequencies of Kagome lattice cylindrical shell are investigated. The novelty of this paper is using the Flugge shell theory as well as a modified equivalent stiffness matrix for vibration analysis of Kagome lattice shell.

Keywords: Free vibration, Cylindrical shell, Kagome lattice, Navier method

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای تقویت شده با شبکه کاگومه بر مبنای مدل ماتریس سفتی معادل بهبود یافته

علی جعفری

کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه مهندسی
مکانیک، دانشگاه صنعتی قم

محمد فدایی*

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه مهندسی مکانیک،
دانشگاه صنعتی قم

المان محدود در نرم‌افزار آباکوس مقایسه گردیده است. در پایان، اثر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی سازه بررسی شده است. استفاده از تئوری پوسته فلوگه به همراه یک مدل ماتریس سفتی بهبود یافته برای تحلیل ارتعاش پوسته‌های مشبک کاگومه، بنیان اصلی نوآوری این مقاله را تشکیل می‌دهد.

کلید واژه‌ها

ارتعاشات آزاد، پوسته استوانه‌ای، مشبک کاگومه، روش ناویه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۲۹

* نویسنده مسئول: Fadaee@qut.ac.ir

۱ مقدمه

سازه‌های تقویت‌شده شبکه‌دار، نسبت استحکام به وزن بالایی در مقایسه با دیگر سازه‌های مشابه دارند. به همین منظور، در صنایعی همچون هوافضا و نظامی استفاده می‌شود. سازه مشبک، سازه‌ای است که در آن شبکه‌ای از تقویت‌کننده‌های یکپارچه و یکنواخت، با پوسته و یا بدون پوسته ساخته می‌شود. در این گونه سازه‌ها بررسی ارتعاشی مهم می‌باشد [۱]. یکی از موارد کاربرد سازه‌های شبکه‌دار در صنایع هوافضا، استفاده آن در موشک دلتا^۱ و ساترن^۲ می‌باشد. یکی از اولین کتاب‌های طراحی سازه‌های مشبک در سال ۱۹۷۳، توسط شرکت مک دانل داگلاس^۳ و تحت نظر سازمان فضایی آمریکا^۴ انجام شده است [۲]. بوراگون و ولموراگون^۵ یک مدل تحلیلی برای سازه‌های مشبک کامپوزیتی شش وجهی ارائه نمودند که در این تحقیق از روش انرژی برای معادل سازی تقویت‌کننده‌ها و پوسته استفاده شده است [۳].

چکیده

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مشبک کاگومه با استفاده از یک مدل ماتریس سفتی بهبود یافته ارائه شده است. شرط مرزی پوسته تکیه‌گاه ساده بوده و تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک در بدست آوردن معادلات حرکت آن مورد استفاده قرار گرفته است. ماتریس سفتی بهبود یافته پوسته مشبک از جمع ماتریس سفتی پوسته ساده و پوسته با شبکه‌های تقویت‌کننده بر اساس نسبت حجمی آنها استخراج می‌گردد. معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتن و فرضیات تئوری پوسته نازک فلوگه استخراج گردیده و حل مسئله با استفاده از روش ناویه صورت گرفته است. برای بررسی صحت و دقت روابط ریاضی حاکم بر روش حاضر، نتایج بدست آمده با نتایج یک تحلیل

- 1-Delta
- 2-Satrun
- 3-Mc Donnell Douglas
- 4-NASA
- 5-Buragohain and Velmurugan

همکارانش^{۱۸} یک تحلیل دو بعدی الکتروالاستیک برای پوسته استوانه‌ای تحت فشار مدرج تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی را ارائه کرده‌اند [۱۷]. خوشگفتار و همکاران^{۱۹} تحلیل الاستیک یک پوسته استوانه‌ای مدرج ضخیم را بررسی کردند [۱۸]. عارفی و همکارانش^{۲۰} تحلیل سه بعدی ارتعاش یک پوسته استوانه‌ای مدرج با وصله پیزوالکتریک مدرج را مطالعه کردند [۱۹].

سازه‌های مشبک انواع مختلفی دارد که عبارتند از سازه با شبکه مستطیلی، شبکه مثلثی ساده، شبکه مثلثی فلنچ‌دار و سازه مشبک کاگومه. در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد استوانه مشبک کاگومه و دارای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده بررسی شده است. برای بدست آوردن معادلات حرکت، ابتدا ماتریس سفتی سازه مشبک به دست می‌آید. برای این منظور، یک سلول واحد از تقویت کننده‌ها انتخاب نموده و سپس ممان‌ها و نیروهای ایجاد شده در تقویت کننده‌ها، بر حسب کرنش‌ها و انحنای صفحه میانی پوسته بدست می‌آید. ماتریس سفتی کل، از جمع ماتریس سفتی تقویت کننده‌ها با نسبت حجمی تقویت کننده‌ها به حجم کل و ماتریس سفتی پوسته با نسبت حجمی پوسته به حجم کل بدست می‌آید. سپس با استفاده از روش انرژی، معادلات حرکت پوسته مشبک بر اساس تئوری فلوگه^{۲۱} بدست آمده است. در نهایت، فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش حل ناویه بدست می‌آیند. نوآوری اصلی این مقاله استفاده از تئوری پوسته فلوگه بر مبنای یک مدل ماتریس سفتی بهبود یافته است.

۲. استخراج روابط حاکم

۲.۱. هندسه مسئله

هندسه مسئله در شکل ۱ قابل مشاهده است.

همت‌نژاد، رحیمی و انصاری بر روی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه کامپوزیتی شبکه‌دار مطالعه نموده‌اند که شکل تقویت کننده‌ها به صورت لوزی می‌باشد [۴].

یکی از روش‌ها جهت مدل کردن پوسته و تقویت کننده‌ها، توسط منبع [۵] ارائه شده که در این روش، عکس العمل‌های نیرویی و ممان تقویت کننده‌ها بر روی پوسته، به عنوان تابعی از انحنای و کرنش‌های صفحه میانی پوسته در نظر گرفته شده است. روش‌های مختلفی برای مدل کردن تقویت کننده‌ها وجود دارد که عبارتند از روش منشعب شده پوسته و استوانه، روش معادل‌سازی و روش گسسته‌سازی. نایت و استرنس^۶ [۶] و هیلبرگ^۷ [۷] بر روی روش منشعب شده پوسته و استوانه کار کردند. وازیلیوف و پیخادز^۸ از روش معادل‌سازی بر مبنای روابط انرژی به دست آوردند [۸]. بوناکوف و فدروف^۹ [۹] و بوناکوف^{۱۰} [۱۰] تقویت کننده‌ها را بر اساس تئوری الاستیسیته مدل کرده است که پیچش و خمش ریب‌ها در نظر گرفته شده است. ژانگ و همکارانش^{۱۱} با استفاده از نرم‌افزار آباکوس تغییر شکل‌های ناشی از نیروی محوری را در استوانه مشبک بررسی کرده‌اند [۱۱]. توتارو و گیردال^{۱۲} یک روش طراحی بهینه برای سازه‌های مشبک کامپوزیتی تحت بار محوری ارائه کردند [۱۲]. هو و گرامول^{۱۳} بار کمانش استوانه تقویت شده مشبک را با استفاده از نرم افزار کاسموس^{۱۴} به دست آوردند [۱۳]. پایداری الاستیک سازه‌ای یک کامپوزیت مشبک، توسط فرولونی و همکارانش^{۱۵} با کاربرد هوافضایی انجام گرفته است [۱۴]. اسلنچکو و ورجنکو^{۱۶} یک روش معادل‌سازی ارائه کردند که کاربرد زیادی دارد [۱۵]. کانو و همکاران^{۱۷} بر روی تنش و کمانش پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی بر اساس روشی عددی تحقیق کرده‌اند [۱۶]. عارفی و

14-COSMOS
15-Frulloni et al.
16-Slinchenko and Verjenko
17-Kanou et al.
18-Arefi et al.
19-Khoshgoftar et al.
20-Arefi et al.
21-Flugge theory

6-Knight and Stranes
7-Hilburger
8-Vasiliev and Pichkazade
9-Bunakov and Fedorov
10-Bunakov
11-Zhang et al.
12-Totaro and Gurdal
13-Hou and Gramoll

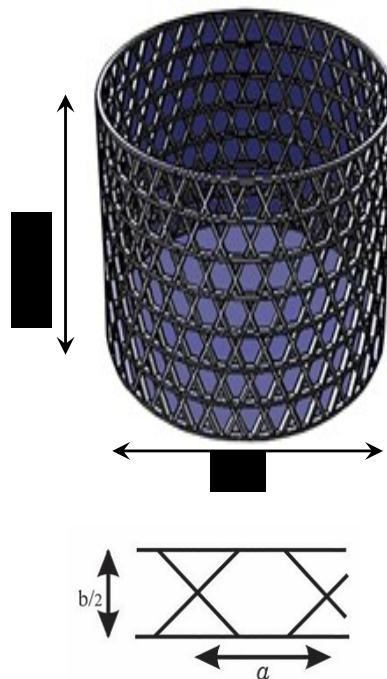
ب) ابعاد سطح مقطع در مقایسه با طول تقویت کننده‌ها خیلی کوچک می‌باشد. بنابراین تقویت کننده‌ها فقط بارهای در راستای محورشان را تحمل می‌کنند.

ج) کرنش در مقطع تقویت کننده‌ها یکنواخت می‌باشد.

د) مبنای محاسبه ممان ایجاد شده در شبکه تقویت کننده در روش بهبود یافته، فاصله بین صفحه میانی پوسته ساده و صفحه‌ای است که از میان شبکه می‌گذرد. این در حالیست که برای ماتریس سفتی موجود در منابع [۱، ۴، ۵] فرض بر آن است که نیروهای موجود در شبکه، بر روی سطح پوسته وارد شده و در نتیجه، ممان ایجاد شده در شبکه تقویت کننده بر حسب فاصله مرکز پوسته ساده تا سطح آن (نصف ضخامت پوسته یا $t/2$) محاسبه می‌گردد. در شکل ۲ مشاهده می‌گردد که نیروی داخلی تمامی تقویت کننده‌ها هم جهت با محور مختصات انتخابی نمی‌باشد، بنابراین از ماتریس تبدیل استفاده می‌گردد. رابطه بین کرنش‌ها در دستگاه کلی $(x - \theta)$ و دستگاه تقویت کننده $(1 - t)$ به صورت زیر می‌باشد [۵]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در آن ϕ زاویه چرخش سطح مقطع تقویت کننده نسبت به محور استوانه، S و C سینوس و کسینوس زاویه ϕ می‌باشند.

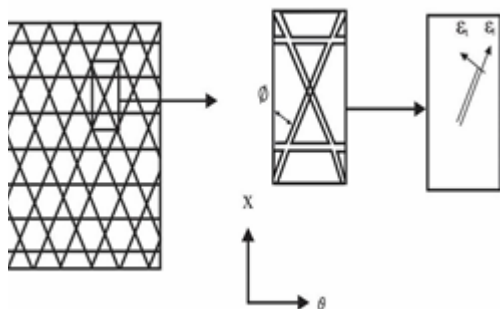


شکل ۱. هندسه پوسته مشبک کاگومه

که در آن $2 \times R$ قطر استوانه و L طول استوانه است. همچنین a طول ضلع شش ضلعی به علاوه قاعده مثلث تقویتی و $b/2$ فاصله بین تقویت کننده‌های محیطی است.

۲.۲. انتخاب المان معادل

بر طبق شکل ۲، ابتدا یک سلول واحد انتخاب می‌گردد که بیانگر تمامی خواص کل ساختار پوسته مشبک می‌باشد. عکس‌العمل‌های نیرویی و ممان تقویت کننده‌ها بر روی پوسته به عنوان تابعی از انحناها و کرنش‌های صفحه میانی پوسته $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_\theta^0, \varepsilon_{x\theta}^0, k_x, k_\theta, k_{x\theta})$ مورد بررسی قرار می‌گیرد [۵]. در این روش فرضیه‌هایی مدنظر می‌باشد که عبارتند از الف) کل سازه استوانه‌ای مشبک، ساخته از سلول واحد نشان داده شده در شکل ۲ می‌باشد.



شکل ۳. سلول واحد و پوسته مشبک کاگومه

۲.۲.۲. تحلیل ممان سلول واحد

به علت وجود نیرو در تقویت کننده‌ها و فاصله این نیروها نسبت به مرجع محاسبه کرنش‌ها یعنی صفحه میانی پوسته، ممان‌هایی درون شبکه تقویتی ایجاد خواهد شد که در شکل ۴ دیده می‌شود. این ممان‌ها به شکل زیر نوشته می‌شوند [۵]:

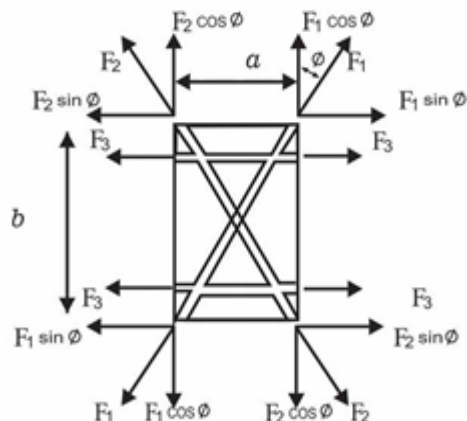
$$M_x = \frac{AEt}{2a} (2c^3 \varepsilon_x^0 + 2c^3 k_x \left(\frac{t}{2}\right) + \tag{۵}$$

$$2s^2 c \varepsilon_\theta^0 + 2s^2 c k_\theta \left(\frac{t}{2}\right))$$

$$M_\theta = \frac{AEt}{2b} (2sc^2 \varepsilon_x^0 + 2sc^2 k_x \left(\frac{t}{2}\right) + \tag{۶}$$

$$(2s^3 + 2) \varepsilon_\theta^0 + (2s^3 + 2) k_\theta \left(\frac{t}{2}\right))$$

$$M_{x\theta} = \frac{AEt}{2b} (2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2 k_{x\theta} \left(\frac{t}{2}\right) + \tag{۷}$$



شکل ۴. توزیع نیرویی المان واحد

۱.۲.۲. تحلیل نیرویی المان معادل

شکل ۳ نشانگر سلول واحد می‌باشد که نیروهای اعمالی بر آن قابل مشاهده است. در شکل ۳، با تحلیل نیرویی در دو راستای X و θ و تقسیم این نیروها بر طول المان در این راستاها، معادلات نیروهای $N_{x\theta}$, N_θ , N_x بصورت زیر بدست می‌آید [۵].

$$N_x = \frac{AE}{a} (2c^3 \varepsilon_x^0 + 2c^3 k_x \left(\frac{t}{2}\right) + 2s^2 c \varepsilon_\theta^0 + \tag{۲}$$

$$2s^2 c k_\theta \left(\frac{t}{2}\right))$$

$$N_\theta = \frac{AE}{b} (2sc^2 \varepsilon_x^0 + 2sc^2 k_x \left(\frac{t}{2}\right) + (2s^3 + 2) \varepsilon_\theta^0 + \tag{۳}$$

$$+(2s^3 + 2) k_\theta \left(\frac{t}{2}\right))$$

$$N_{x\theta} = \frac{AE}{b} (2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2 k_{x\theta} \left(\frac{t}{2}\right) + \tag{۴}$$

که در آن A سطح مقطع تقویت کننده‌ها، E مدول الاستیسیته و t ضخامت پوسته است.

$$B_{ij}^g = \begin{bmatrix} \frac{AEtc^3}{a} & \frac{AEt s^2 c}{a} & 0 \\ \frac{AEtsc^2}{b} & \frac{(AEt s^3 + 2AEt)}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AEt s c^2}{b} \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^g = \begin{bmatrix} \frac{AEt^2 c^3}{2a} & \frac{AEt^2 s^2 c}{2a} & 0 \\ \frac{AEt^2 sc^2}{2b} & \frac{(AEt s^3 + 2AEt)}{4b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AEt^2 s^2 c}{2b} \end{bmatrix}$$

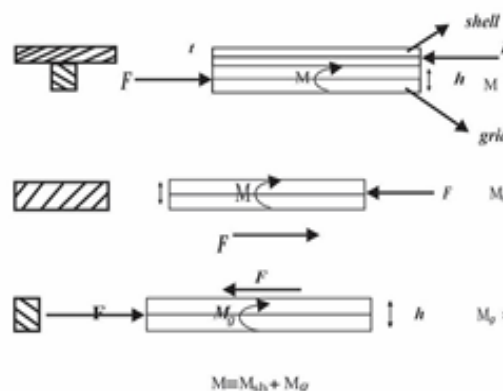
در روابط بالا ماتریس‌های A_{ij}^g ، B_{ij}^g و D_{ij}^g به ترتیب ماتریس کششی، کوپلینگ و خمشی می‌باشد.

۲.۳.۲. ماتریس سفتی پوسته

در این مقاله، رفتار ماده بکار رفته در پوسته، همسانگرد فرض شده و در نتیجه ماتریس سفتی پوسته به صورت زیر می‌باشد [۲۰]:

$$\begin{bmatrix} N_x^{sh} \\ N_\theta^{sh} \\ N_{x\theta}^{sh} \\ M_x^{sh} \\ M_\theta^{sh} \\ M_{x\theta}^{sh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{sh} & B_{ij}^{sh} \\ B_{ij}^{sh} & D_{ij}^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \epsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix}, B_{ij}^{sh} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij}^{sh} = \begin{bmatrix} \frac{Et}{1-\nu^2} & \frac{Et\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{Et}{1-\nu^2} & \frac{Et}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$



شکل ۴. ممان ایجاد شده به واسطه تقویت‌کننده‌ها بر روی پوسته

۳.۲. به دست آوردن ماتریس سفتی سازه

۱.۳.۲. ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها

حال می‌توان روابط (۲) تا (۷) را به شکل ماتریسی بازنویسی کرد. لازم به ذکر است منظور از اندیس g همان تقویت‌کننده‌ها می‌باشد [۵]:

$$\begin{bmatrix} N_x^g \\ N_\theta^g \\ N_{x\theta}^g \\ M_x^g \\ M_\theta^g \\ M_{x\theta}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}^g & B_{ij}^g \\ B_{ij}^g & D_{ij}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \epsilon_{x\theta}^0 \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$A_{ij}^g = \begin{bmatrix} \frac{2AEc^3}{a} & \frac{2AEs^2c}{a} & 0 \\ \frac{2AEsc^2}{b} & \frac{(2AEs^3 + 2AE)}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2AEc^2s}{b} \end{bmatrix} \quad (۹)$$

$$A_{11} = V_{sh} \frac{Et}{1-\nu^2} + V_g \times AE \times \frac{2\cos^3(\phi)}{a}$$

$$A_{12} = V_{sh} \frac{Et\nu}{1-\nu^2} + V_g \times AE \times \frac{2\sin^2(\phi)\cos(\phi)}{a}$$

$$A_{22} = V_{sh} \frac{Et}{1-\nu^2} + V_g \times AE \times \frac{(2\sin^3(\phi) + 2)}{a}$$

$$A_{33} = V_{sh} \frac{Et}{2(1+\nu)} + V_g \times AE \times \frac{2\sin(\phi)\cos^2(\phi)}{b}$$

$$B_{11} = 0 + V_g \times AE \times \frac{\cos^3(\phi)(t)}{a}$$

$$B_{12} = 0 + V_g \times AE \times \frac{\sin^2(\phi)\cos(\phi)(t)}{a}$$

$$B_{22} = 0 + V_g \times AE \times \frac{(2\sin^3(\phi) + 2)(t)}{2b}$$

$$B_{33} = 0 + V_g \times AE \times \frac{\sin(\phi)\cos^2(\phi)(t)}{b}$$

$$D_{11} = V_{sh} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + V_g \times AE \times \frac{\cos^3(\phi)(t)^2}{2a}$$

$$D_{12} = V_{sh} \frac{Et^3\nu}{12(1-\nu^2)} + V_g \times AE \times \frac{\sin^2(\phi)\cos(\phi)(t)^2}{2a}$$

$$D_{22} = V_{sh} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + V_g \times AE \times \frac{(2\sin^3(\phi) + 2)(t)^2}{4b} \quad (12)$$

$$D_{33} = V_{sh} \frac{Et^3}{24(1+\nu)} + V_g \times AE \times \frac{\sin(\phi)\cos^2(\phi)(t)^2}{2b}$$

نوآوری اصلی مقاله در اینجاست که مبنای محاسبه ممان ایجاد شده در شبکه، فاصله بین صفحه میانی پوسته ساده و صفحه‌ای است که از میان شبکه می‌گذرد. بنابراین المان‌های ماتریس سفتی جدید به صورت زیر خواهد شد:

$$D_{ij}^{sh} = \begin{bmatrix} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{AEt^2s^2c}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{AEt^2sc^2}{12(1-\nu^2)} & \frac{(AEts^3 + 2AEt)}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AEt^2s^2c}{24(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

که در آن ν ضریب پواسون پوسته و نماد sh نشانگر پوسته است.

۳.۳.۲. ماتریس سفتی کل سازه

در این مقاله برای به دست آوردن ماتریس سفتی کل از نسبت حجمی استفاده شده است، به نحوی که ماتریس سفتی کل از جمع ماتریس سفتی پوسته و تقویت‌کننده‌ها با نسبت حجمی‌شان به حجم کل به دست می‌آید [۵]:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g N^g + V_{sh} N^{sh} \\ V_g M^g + V_{sh} M^{sh} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} V_g A^g + V_{sh} A^{sh} & V_g B^g + V_{sh} B^{sh} \\ V_g B^g + V_{sh} B^{sh} & V_g D^g + V_{sh} D^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix}$$

$$V_{sh} = \frac{v_{sh}}{v_{sh} + v_g}, V_g = \frac{v_g}{v_{sh} + v_g}$$

شکل گسترده رابطه (۱۰) به صورت زیر می‌باشد [۵]:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \epsilon_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

المان‌های ماتریس رابطه (۱۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{t+t'}{2}}^{\frac{t+t'}{2}} \rho ((\partial U_x / \partial t)^2 + (\partial U_\theta / \partial t)^2 + (\partial U_z / \partial t)^2) R dx d\theta dz \quad (۱۶)$$

که در آن ρ چگالی استوانه مشبک است. U_x ، U_θ و U_z نیز میدان جابجایی پوسته در سه راستای X ، θ و Z بصورت زیر هستند:

$$U_x = U(x, \theta, t) - z \frac{\partial W(x, \theta, t)}{\partial x} \quad (۱۷)$$

$$U_\theta = V(x, \theta, t) - \frac{z}{R} \frac{\partial W(x, \theta, t)}{\partial \theta}$$

$$U_z = W(x, \theta, t)$$

بر اساس تئوری فلوگه پوسته‌ها، می‌توان انحناها و کرنش‌های صفحه میانی پوسته یعنی بترتیب $k_x, k_\theta, k_{x\theta}$ و $\epsilon_x^0, \epsilon_\theta^0, \epsilon_{x\theta}^0$ بیان شده در رابطه (۱۱) را می‌توان بصورت زیر نوشت [۲۱]:

$$\epsilon_x^0 = U_{,x} \quad (۱۸)$$

$$\epsilon_\theta^0 = \frac{V_{,\theta}}{R} + \frac{1}{R} W$$

$$\epsilon_{x\theta}^0 = V_{,x} + \frac{U_{,\theta}}{R}$$

$$k_x = -W_{,xx}$$

$$k_\theta = -\frac{W_{,\theta\theta}}{R^2} - \frac{W}{R^2}$$

$$k_{x\theta} = \frac{V_{,x}}{R} - \frac{U_{,\theta}}{R^2} - 2 \frac{W_{,x\theta}}{R}$$

حال بر اساس اصل همیلتن خواهیم داشت:

$$\int_0^t (\delta U_e + \delta T) dt = 0 \quad (۱۹)$$

که در آن δ عملگر حساب تغییرات و t زمان است. حال با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۹) می‌توان به معادلات حرکت پوسته مشبک دست یافت. از طرفی، توابع جابه‌جایی برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده به صورت زیر می‌باشد [۲۲]:

$$A_{11} = V_{sh} \frac{Et}{1-\nu^2} + V_g \times AE \times \frac{2\cos^3(\phi)}{a}$$

$$A_{12} = V_{sh} \frac{Et\nu}{1-\nu^2} + V_g \times AE \times \frac{2\sin^2(\phi)\cos(\phi)}{a}$$

$$A_{22} = V_{sh} \frac{Et}{1-\nu^2} + V_g \times AE \times \frac{(2\sin^3(\phi)+2)}{a}$$

$$A_{33} = V_{sh} \frac{Et}{2(1+\nu)} + V_g \times AE \times \frac{2\sin(\phi)\cos^2(\phi)}{b}$$

$$B_{11} = 0 + V_g \times AE \times \frac{\cos^3(\phi)(t+t')}{a}$$

$$B_{12} = 0 + V_g \times AE \times \frac{\sin^2(\phi)\cos(\phi)(t+t')}{a}$$

$$B_{22} = 0 + V_g \times AE \times \frac{(2\sin^3(\phi)+2)(t+t')}{2b}$$

$$B_{33} = 0 + V_g \times AE \times \frac{\sin(\phi)\cos^2(\phi)(t+t')}{b}$$

$$D_{11} = V_{sh} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + V_g \times AE \times \frac{\cos^3(\phi)(t+t')^2}{2a}$$

$$D_{12} = V_{sh} \frac{Et^3\nu}{12(1-\nu^2)} + V_g \times AE \times \frac{\sin^2(\phi)\cos(\phi)(t+t')^2}{2a}$$

$$D_{22} = V_{sh} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + V_g \times AE \times \frac{(2\sin^3(\phi)+2)(t+t')^2}{4b} \quad (۱۳)$$

$$D_{33} = V_{sh} \frac{Et^3}{24(1+\nu)} + V_g \times AE \times \frac{\sin(\phi)\cos^2(\phi)(t+t')^2}{2b}$$

که در آن t ضخامت پوسته و t' ضخامت تقویت‌کننده‌ها است.

۴.۲ استخراج معادلات حرکت

مجموع انرژی پوسته مشبک بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Pi = U_e + T \quad (۱۴)$$

که در آن U_e انرژی کرنشی پوسته مشبک است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰]:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (N_x \epsilon_x^0 + N_\theta \epsilon_\theta^0 + N_{x\theta} \epsilon_{x\theta}^0) R dx d\theta \quad (۱۵)$$

$$M_x k_x + M_\theta k_\theta + M_{x\theta} k_{x\theta}) R dx d\theta dz$$

همچنین T انرژی جنبشی کل پوسته مشبک است که:

۷۹۹ ۹۴۱ ۱۵

منظور از شماره مد، همان ترکیب m و n است. واحد فرکانس در جداول هر تریز می‌باشد. بطور مثال منظور از شماره مد ۱۲، $m=1$ و $n=2$ می‌باشد. در جداول ۲ و ۳ بترتیب ضخامت پوسته ۲ و ۴ میلی‌متر می‌باشد. همانطور که گفته شد، اختلاف بین روش‌ها برای شماره مد ۱۲ کاهش یافته است. دلیل رفتار کاهشی و سپس افزایشی فرکانس آن است که سطح انرژی کرنشی پوسته با افزایش مداوم مود محیطی n ، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

جدول ۲. مقایسه بین روش تحلیلی با روش المان محدود

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.1\text{mm}, t = 2\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 96\text{mm}, b = 148\text{mm})$$

شماره مود	فرکانس روش المان محدود	فرکانس روش تحلیلی
۱۲	۱۱۸۹	۱۲۱۴
۱۳	۸۷۹	۸۳۳
۱۴	۷۵۰	۷۲۹/۴
۱۵	۷۹۸	۸۴۷

جدول ۳. مقایسه بین روش تحلیلی با روش المان محدود

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.1\text{mm}, t = 4\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 96\text{mm}, b = 148\text{mm})$$

شماره مود	فرکانس روش المان محدود	فرکانس روش تحلیلی
۱۲	۱۲۷۵	۱۲۲۵
۱۳	۹۴۰	۸۷۳
۱۴	۷۸۸	۷۲۳
۱۵	۸۱۶	۷۵۷

در سه شکل ۵، ۶ و ۷ اثر شماره مد بر فرکانس طبیعی در ابعاد تقویت کننده‌های جدید و در سه ضخامت مختلف، بدست آمده از دو روش حاضر و المان محدود مقایسه گردیده است.

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) \sin(\omega t) \quad (20)$$

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \sin(\omega t)$$

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) \sin(\omega t)$$

که در آن L طول استوانه مشبک است. حال با قرار دادن رابطه (۲۰) در معادلات حرکت، مسئله مقدار ویژه‌ای بدست می‌آید که در آن مقادیر ویژه همان فرکانس‌های طبیعی پوسته مشبک خواهد بود.

۳. تحلیل المان محدود

برای انجام تحلیل المان محدود مسئله در نرم افزار آباکوس، ابتدا شبکه تقویت کننده‌ها را در نرم افزار کتیا^{۲۲} مدل سازی نموده و سپس آن را وارد نرم افزار آباکوس^{۲۳} کرده و پوسته ساده‌ای را بر روی تقویت کننده‌ها قرار داده و پس از المان بندی آن، تحلیل مودال انجام می‌گیرد.

۴. نتایج

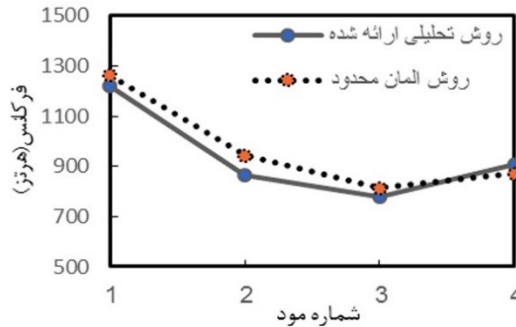
در این بخش، مقایسه‌ای بین نتایج روش تحلیلی حاضر و تحلیل المان محدود انجام گرفته است. در جداول ۱، ۲ و ۳، این مقایسه برای ضخامت‌های پوسته مختلف (ضخامت‌های ۱، ۲ و ۴ میلی‌متر) صورت گرفته است. در جدول ۱ ضخامت پوسته ۱ میلی‌متر می‌باشد. برای شماره مد ۱۲ کمی اختلاف بین روش تحلیلی و روش المان محدود موجود می‌باشد که این اختلاف در ضخامت‌های بیشتر، کم می‌گردد.

جدول ۱. مقایسه بین روش تحلیلی با روش المان محدود

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.1\text{mm}, t = 1\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 96\text{mm}, b = 148\text{mm})$$

شماره مود	فرکانس روش المان محدود	فرکانس روش تحلیلی
۱۲	۱۱۳۹	۱۳۴۹
۱۳	۸۵۵	۸۵۵
۱۴	۷۴۳	۷۵۶

طبق شکل ۷، اختلاف بین روش تحلیلی و روش المان محدود در شماره مد ۱۲ برای ضخامت ۴ میلی‌متر کم شده است.



شکل ۷. تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب شماره مود برای مقایسه بین روش المان محدود و روش تحلیلی در ضخامت ۴ میلی‌متر

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.15\text{mm}, t = 4\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 64\text{mm}, b = 96\text{mm})$$

در شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود که ضخامت پوسته و تقویت‌کننده‌ها در هر شکل ثابت می‌باشد. اما بقیه ابعاد تغییر کرده است. به همین منظور ابعاد مدل یک به صورت زیر است:

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.15\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 64\text{mm}, b = 96\text{mm})$$

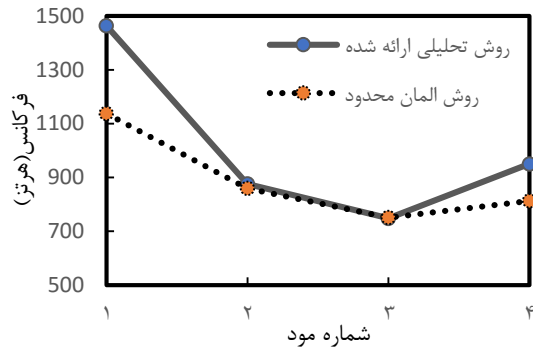
ابعاد مدل دو به صورت زیر است:

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.15\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 96\text{mm}, b = 148\text{mm})$$

ابعاد مدل سه به صورت زیر است:

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.2\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 74\text{mm}, b = 116\text{mm})$$

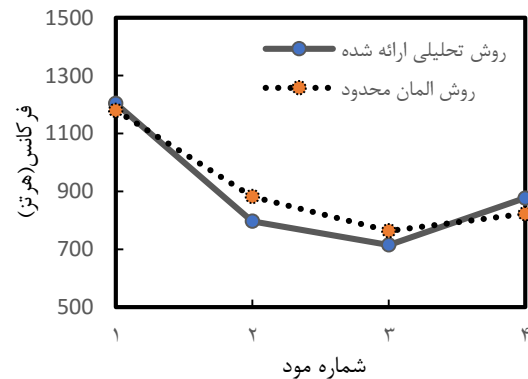
همانطور که در سه شکل زیر مشاهده می‌شود، با اینکه ابعاد متفاوت است اما نتایج هر سه مدل نزدیک یکدیگرند. علت آن است که نسبت b/a در هر سه شکل تقریباً برابر هستند.



شکل ۵. تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب شماره مود برای مقایسه بین روش المان محدود و روش تحلیلی در ضخامت ۱ میلی‌متر

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.15\text{mm}, t = 1\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 64\text{mm}, b = 96\text{mm})$$

همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، با تغییر ابعاد، در شماره مد ۱۲، اختلاف کمی بین روش تحلیلی ارائه شده با روش المان محدود وجود دارد.



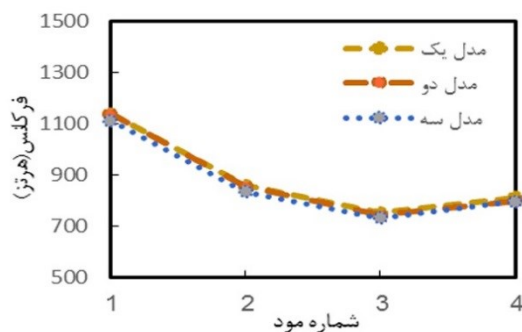
شکل ۶. تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب شماره مود برای مقایسه بین روش المان محدود و روش تحلیلی در ضخامت ۲ میلی‌متر

$$(R = 35.0\text{mm}, L = 40.15\text{mm}, t = 2\text{mm}, t' = 12\text{mm}, a = 64\text{mm}, b = 96\text{mm})$$

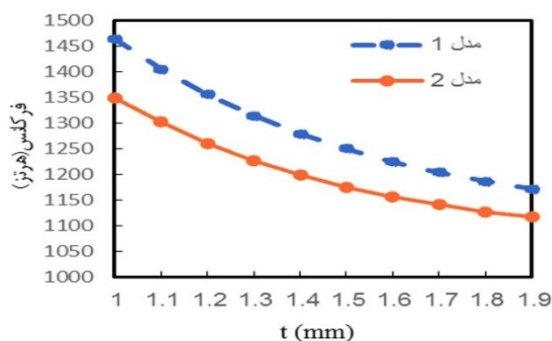
شکل ۱۰. تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب شماره مود برای ضخامت ۴ میلی‌متر پوسته

در شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ مشاهده می‌گردد که ابتدا فرکانس کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد.

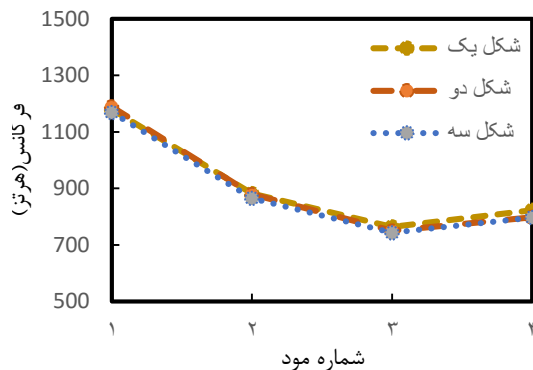
در شکل ۱۱ تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب ضخامت مشاهده می‌شود. برای شکل‌های ۱۳ و ۱۴ ضخامت پوسته ۱ میلی‌متر می‌باشد.



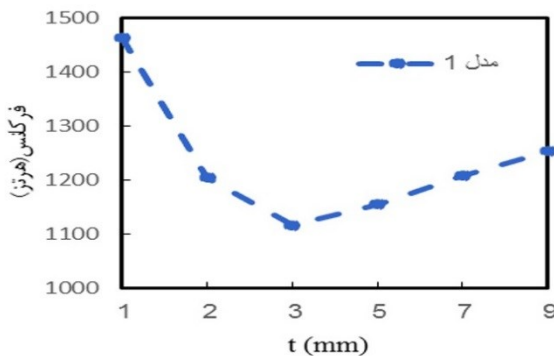
شکل ۸. تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب شماره مود برای ضخامت ۱ میلی‌متر پوسته



شکل ۱۱. تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب ضخامت پوسته برای دو مدل ۱ و ۲

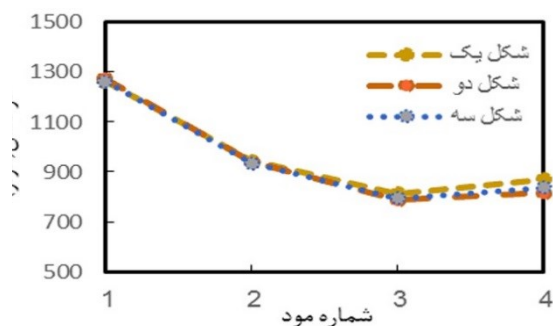


شکل ۹. تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب شماره مود برای ضخامت ۲ میلی‌متر پوسته



شکل ۱۲. تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب ضخامت پوسته برای مدل ۱

روند نمودار در شکل ۱۲ نزولی است، اما در شکل ۱۳ وقتی بازه ضخامت بیشتر می‌شود، ابتدا نمودار نزولی و سپس صعودی گردیده است. علت آن است که با افزایش ضخامت پوسته، با توجه



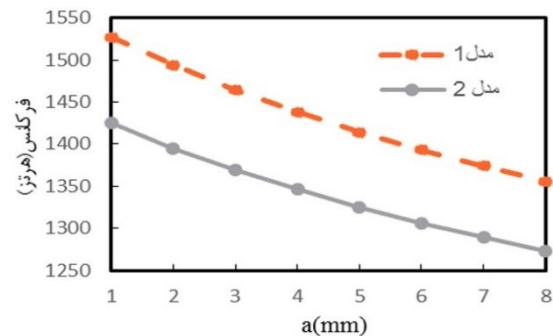
۵. نتیجه گیری

در این مقاله، با استفاده از تحلیل نیرویی و ممان یک المان نماینده از شبکه منظم کاگومه، ماتریس سفتی بهبود یافته استوانه مشبک استخراج گردید. سپس با استفاده از مفهوم نسبت حجمی، سفتی معادل مجموعه پوسته و تقویت کننده ها بدست آمد. در ادامه، با استفاده از تئوری فلوگه و جایگذاری شرایط مرزی در معادلات ارتعاشی، تحلیل فرکانسی صورت پذیرفت. مقایسه نتایج حاصل شده با روش المان محدود، دقت بسیار خوبی را برای روش معادل سازی جدید گزارش داد. در پایان اثر پارامترهای هندسی بر روی فرکانس‌های طبیعی سازه بررسی شد.

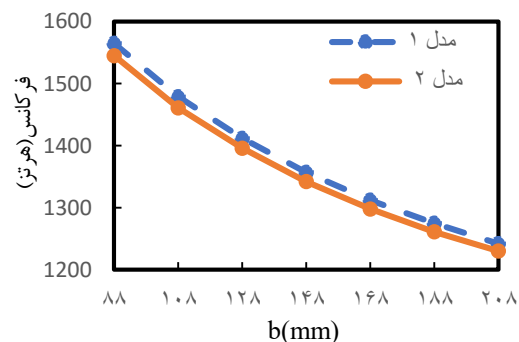
۶- منابع

- [1] Hosseini Hashemi Sh, Kalantri S and Fadaee M. Application of polynomial differential quadrature method for buckling analysis of waffle cylindrical shell under axial load. 12th Conference of Iranian Aerospace Society 2013 (In Persian).
- [2] Huntington B. Isogrid Design Handbook. Alabama: Marshall Space Flight Center; NASA; CR-124075 1973.
- [3] Buragohain M and Velmurugan R. Buckling analysis of composite hexagonal lattice cylindrical shell using smeared stiffener model. Defence Science Journal 2009 59:230-23.
- [4] Hemmatnezhad M, Rahimi GH and Ansari R. On the free vibrations of grid-stiffener composite cylindrical shell. Acta Meccanica 2014 225:609-23.
- [5] Kidane S. Buckling Analysis of Grid Stiffened Composite Structures. Msc Thesis; Department of Mechanical Engineering; Louisiana State University 2002.
- [6] Knight N and Stranes J. Development in cylindrical shell stability analysis. NASA Report 1977.
- [7] Hilburger M. Nonlinear and Buckling behavior of compression loaded composite shells. Proceedings of the 6th Annual Technical

به ماتریس سفتی کل (رابطه ۱۳)، نسبت حجمی پوسته افزایش و نسبت حجمی شبکه کاهش می یابد. از آنجاییکه سفتی شبکه سهم بسزایی در انرژی کرنشی کل پوسته دارد، در نتیجه با کاهش نسبت حجمی شبکه فرکانس کاهش یافته است. همچنین بر طبق روابط (۱۱) و (۱۳) می توان گفت که با افزایش ضخامت پوسته، ممان ایجاد شده داخلی پوسته افزایش یافته و باعث کاهش سفتی پوسته مشبک می گردد.



شکل ۱۳. تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب a برای دو مدل ۱ و ۲



شکل ۱۴. تغییرات فرکانس طبیعی پایه بر حسب b برای دو مدل ۱ و ۲

با افزایش اندازه a و b در شکل‌های ۱۳ و ۱۴، انتظار می‌رود فرکانس کاهش یابد، زیرا تعداد شبکه‌های تقویت‌کننده کاهش یافته است.

- with piezoelectric face-sheets. *Thin-Walled Structures* 2019 144:106320.
- [18] Khoshgoftar MJ, Rahimia GH and Arefi M. Exact solution of functionally graded thick cylinder with finite length under longitudinally non-uniform pressure. *Mechanics Research Communications* 2013 51:61-6.
- [19] Arefi M, Karroubi R and Irani-Rahaghi M. Free vibration analysis of functionally graded laminated sandwich cylindrical shells integrated with piezoelectric layer. *Applied Mathematics and Mechanics* 2016 37:821-34.
- [20] Reddy JN. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*. Second Ed. Boca Raton; New York: Washington D.C. 2004.
- [21] Mirfakhraei P and Redekop D. Buckling of circular cylindrical shells by the Differential Quadrature Method. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 1998 75:519-28.
- [22] Hosseini-Hashemi Sh, Fazeli S and Fadaee M. Obtaining the natural frequencies of moderately thick orthotropic plates with piezoelectric patches using the Ritz method. *Modares Mechanical Engineering* 2011 11:65-73 (In Persian).
- Conference of the American Society for Composite; Virginia 2001.
- [8] Vasiliev VV and Pichkhadze GP. Composite shells and plates with spatial scheme of reinforcement. *Design, Computation and Testing of Composite Structures* 1982 9:83-90 (in Russian).
- [9] Bunakov V and Fedorov L. Application of micropolar theory of elasticity to lattice structures. *Mechanics of solids; Proc of Russian Academy of Science* 1994. p. 148-54 (in Russian).
- [10] Bunakov V. Design of axially compressed composite cylindrical shells with lattice stiffeners. *Optimal design, Theory and applications to materials and structures; Lancaster (PA)* 1999 p. 207-46.
- [11] Zhang Y, Xue Z, Chen L and et al. Deformation and failure mechanisms of lattice cylindrical shells under axial loading. *International Journal of Mechanical Sciences* 2009 51:213-21.
- [12] Totaro G and Gurdal Z. Optimal design of composite lattice shell structures for aerospace applications. *Aerospace Science Technology* 2009 13:157-64.
- [13] Hou A and Gramoll K. Compressive strength of composite latticed structures. *Journal of Reinforce Plastic Composites* 1998 17:462-83.
- [14] Frulloni E, Kenny J, Conti P and et al. Experimental study and finite element analysis of the elastic instability of composite lattice structures for aeronautic applications. *Composite Structures* 2007 89:519-28.
- [15] Slinchenko D and Verijenko V. Structural analysis of composite lattice shells of revolution on the basis of smearing stiffness. *Composite Structures* 2001 54:341-8.
- [16] Kanou H, Nabavi SM and Jam J.E. Numerical modeling of stresses and buckling loads of isogrid lattice composite structure cylinders. *International Journal of Engineering Science and Technology* 2013 5:424-54.
- [17] Arefi M, Mohammadi M, Amir-Ahmadi S and Rabczuk T. FSDT electro-elastic analysis of FG-CNTRC cylindrical three-layered pressure vessels