

MECHANICS OF SMART STRUCTURES

Available Online at: <http://jmss.qut.ac.ir/>



Nonlinear thermomechanical buckling analysis of sandwich cylindrical shells with graphene-origami reinforced auxetic core

ARTICLE INFO

Article Type

Farzad Ebrahimi*

Department of Mechanical Engineering,
Faculty of Engineering, Imam Khomeini
International

Mohammad Hossein Goudarzfallahi

Department of Mechanical
Engineering, S.R.C., Islamic Azad
University, Tehran, Iran

Ali Alinia-ziazi

Department of Mechanical
Engineering, S.R.C., Islamic Azad
University, Tehran, Iran

*Correspondence

febrahimi@eng.ikiu.ac.ir

Article History

Received: 16 Feb, 2026

Accepted: 15 Jun, 2026

ePublished: 22 Jun, 2026

ABSTRACT

In this study, the nonlinear thermomechanical buckling and postbuckling behavior of sandwich cylindrical shells with a graphene-origami (GOri) reinforced auxetic core and carbon nanotube (CNT)-reinforced face sheets is investigated. The shell is subjected to uniform torsional loading and a uniform temperature rise. The carbon nanotubes are dispersed within a temperature-dependent polymer matrix, while the auxetic core consists of multiple graphene-origami reinforced layers arranged either in a uniform distribution or a functionally graded (FG) pattern. The auxetic response of the core can be tuned by varying the weight fraction and folding degree of the graphene-origami structure. The governing equations are formulated based on nonlinear Donnell thin shell theory with von Kármán geometric nonlinearity. An analytical solution for a simply supported cylindrical shell is obtained using a three-term displacement function and the Galerkin method to determine the critical buckling load and postbuckling path. The model's accuracy is validated against published results. Parametric studies assess the effects of graphene-origami weight fraction, folding degree, and thermal conditions on buckling and postbuckling behavior. The results indicate that increasing the graphene-origami weight fraction significantly enhances the stability of the shells. This improvement is more pronounced in shells with an FG-X functionally graded distribution than in those with a uniform distribution, resulting in an increase of up to 30.51% in the critical buckling load. In contrast, increasing the folding degree of the graphene-origami structure leads to a slight reduction in shell stability.

Keywords: buckling and postbuckling; auxetic metamaterials; graphene-origami; carbon nanotubes..

کمانش غیرخطی ترمومکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی باهسته‌ی فراکشسان تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی

فرزاد ابراهیمی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)،
قزوین، ایران

محمدحسین گودرز فلاحی

گروه مهندسی مکانیک، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد
اسلامی، تهران، ایران

علی علی نیا زیازی

گروه مهندسی مکانیک، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد
اسلامی، تهران، ایران

چکیده

در این پژوهش، رفتار کمانش و پس‌کمانش ترمومکانیکی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با هسته فراکشسان تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی (GOri) و لایه‌های خارجی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی (CNT) مورد بررسی قرار می‌گیرد. پوسته تحت بارگذاری پیچشی یکنواخت و در معرض افزایش یکنواخت دما قرار دارد. نانولوله‌های کربنی درون یک ماتریس پلیمری وابسته به دما توزیع شده‌اند، در حالی که هسته از نوع فراماده فراکشسان تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی می‌باشد. این هسته دارای ساختاری چندلایه است که در آن، هر لایه از ماتریس فلزی مس به‌عنوان فاز زمینه و گرافن-اورینگامی به‌عنوان فاز تقویت‌کننده تشکیل شده است. به‌گونه‌ای که رفتار فراکشسان هسته از طریق تغییر درصد وزنی و درجه تاشدگی ساختار گرافن-اورینگامی کنترل می‌شود.

علاوه‌براین، توزیع گرافن-اورینگامی در راستای ضخامت می‌تواند به دو صورت یکنواخت یا مدرج تابعی (FG) انجام گیرد. معادلات تعادل حاکم در چارچوب نظریه غیرخطی پوسته نازک دائل و با در نظر گرفتن فرضیه‌های غیرخطی هندسی فون‌کارمن استخراج شده‌اند. حل تحلیلی مسئله برای پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، با استفاده از تابع تغییرمکان سه‌جمله‌ای و به‌کارگیری روش گلرکین انجام شده است. بدین ترتیب، بار بحرانی کمانش و نیز رابطه بار-تغییرمکان پس‌کمانش به‌دست آمده است. صحت و کارایی مدل پیشنهادی از طریق مقایسه نتایج با داده‌های موجود در منابع معتبر تأیید شده‌است. در ادامه، مطالعات پارامتری جامعی به‌منظور بررسی اثر پارامترهای کلیدی شامل درصد وزنی گرافن، درجه تاشدگی گرافن-اورینگامی و شرایط حرارتی بر پاسخ کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش درصد وزنی گرافن-اورینگامی نقش مؤثری در بهبود پایداری پوسته‌ها ایفا می‌کند و این بهبود در پوسته‌های دارای توزیع مدرج تابعی FG-X، در مقایسه با توزیع یکنواخت، چشمگیرتر بوده و افزایش بار بحرانی تا ۳۰.۵۱ درصد را به همراه داشته‌است. در مقابل، افزایش درصد تاشدگی گرافن-اورینگامی موجب کاهش جزئی پایداری پوسته‌ها می‌گردد.

کلیدواژه‌ها

کمانش و پس‌کمانش، فرامواد فراکشسان، گرافن-اورینگامی، نانولوله کربنی.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۲۵

*نویسنده مسئول: febrahimi@eng.ikiu.ac.ir

۱ مقدمه

مواد فراکشسان، به‌عنوان دسته‌ای ویژه از فرامواد با نسبت پواسون منفی، در سال‌های اخیر توجه گسترده‌ای را در حوزه‌های پژوهشی

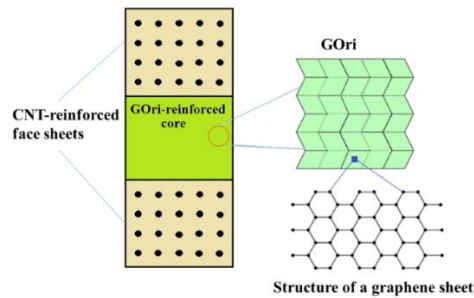
و صنعتی به خود جلب کرده است. مطالعه این مواد نامتعارف به سال ۱۹۸۷ بازمی‌گردد؛ زمانی که لیکس در پژوهش پیشگامانه خود [۱]، فوم‌های فراکشسان را معرفی کرد. از آن زمان تاکنون، پژوهشگران به بررسی انواع گوناگون سازه‌های دارای نسبت پواسون منفی پرداخته‌اند که از ویژگی‌های مکانیکی بهبودیافته‌ای همچون جذب انرژی بالا، مقاومت در برابر برش و فرورفتگی، چقرمگی شکست بیشتر و افزایش مقاومت در برابر ضربه برخوردارند. این ویژگی‌های ارزشمند، مواد فراکشسان را به گزینه‌ای مناسب برای کاربرد در حوزه‌های مختلف از جمله صنایع هوافضا، زیست‌پزشکی و سازه‌های عمرانی تبدیل کرده است [۲]. در سال‌های اخیر، توجه گسترده‌ای به توسعه فرامواد پیشرفته با هندسه‌های پیچیده‌تر و عملکرد مکانیکی بهبودیافته معطوف شده است. از جمله این ساختارها می‌توان به هندسه‌های پروانه‌ای [۳ و ۴]، قوسی‌شکل [۵-۷]، شکل V [۸] و ری‌انترت سه‌بعدی [۹] اشاره کرد.

علاوه بر این، با الهام گرفتن از ساختار اورینگامی، دسته‌ای نوین از فرامواد موسوم به فرامواد فراکشسان تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی (GOEAM) توسط ژائو و همکاران [۱۰] توسعه داده شد که دارای نسبت پواسون منفی قابل تنظیم و خواص مکانیکی بهبودیافته هستند. ژائو و همکاران [۱۱] رفتار ارتعاشی تیرهای تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی را بررسی کردند و در پژوهشی دیگر [۱۲] رفتار کمانشی این تیرها را مورد مطالعه قرار دادند. افزون بر این، ابراهیمی و همکاران در مطالعات اخیر خود [۱۷-۱۳] به تحلیل پایداری غیرخطی پوسته‌های ساندویچی چنبره‌ای با هسته‌های تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی پرداختند.

پوسته‌های استوانه‌ای از پرکاربردترین سازه‌ها در صنایع هوافضا، مهندسی عمران و ساخت مخازن تحت فشار هستند. به دلیل نسبت اندک ضخامت به سایر ابعاد هندسی، این سازه‌ها به‌ویژه در برابر پدیده کمانش آسیب‌پذیر می‌باشند. از این‌رو، مقاومت کمانشی به‌عنوان یکی از معیارهای اساسی در طراحی آن‌ها مدنظر قرار می‌گیرد. در سال‌های اخیر، پژوهش‌ها بر به‌کارگیری مواد پیشرفته به‌منظور بهبود عملکرد سازه‌ای و افزایش پایداری این سازه‌ها

متمرکز شده‌است. با پیشرفت فناوری نانو، نانولوله‌های کربنی (CNTs) به‌عنوان یکی از امیدبخش‌ترین تقویت‌کننده‌ها مطرح شده‌اند و بهبود چشمگیری در خواص ترمومکانیکی کامپوزیت‌ها ایجاد کرده‌اند. پژوهش‌های اخیر به طور گسترده رفتار پایداری پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی را بررسی کرده‌اند. شن [۱۸ و ۱۹] اثر نانولوله‌های کربنی بر رفتار کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی را مطالعه کرد. همچنین، ون‌تین و همکاران [۲۰] تحلیل کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار پیچشی و محیط حرارتی را ارائه دادند. لی و همکاران [۲۱] و دانگ و همکاران [۲۲] نیز نقش هسته‌های فراکشسان و نانولوله‌های کربنی را در پایداری پوسته‌های ساندویچی بررسی کردند. افزون بر این، پژوهش‌هایی بر روی رفتار کمانشی سایر انواع پوسته‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی، از جمله پانل‌ها و پوسته‌های مخروطی، انجام شده است [۲۳-۲۵]. همچنین، رفتار کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های چنبره‌ای ساندویچی دارای هسته فراکشسان نوین توسط گودرزفلاحی و همکاران [۲۶ و ۲۷] و ابراهیمی و همکاران [۳۱-۲۸] بررسی شده است.

مرور ادبیات پژوهش نشان می‌دهد که قابلیت‌های فرامواد نوین، به‌ویژه ساختارهای مبتنی بر گرافن-اورینگامی، در بهبود پایداری پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هنوز به‌طور جامع تبیین نشده است و مطالعات موجود عمدتاً به ساختارهای فراکشسان لانه‌زنبوری متداول محدود بوده‌است. از این‌رو، در این پژوهش، با بهره‌گیری از خواص منحصربه‌فرد فرامواد تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی، رویکردی تحلیلی برای بررسی کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت بار پیچشی و محیط حرارتی ارائه می‌شود. یافته‌های این پژوهش می‌تواند بینش ارزشمندی برای طراحی سازه‌های ساندویچی سبک‌وزن برای کاربرد در محیط‌های با شرایط کاری شدید و تحت بارگذاری‌های پیچیده، از جمله صنایع هوافضا، فراهم آورد.



شکل ۲ تصویر شماتیک ساختار ساندویچی

۲-۲-۱ هسته فراکشسان

در این پژوهش، هسته کامپوزیت ساندویچ ساختار، از فراماده فراکشسان تقویت شده با گرافن-اورینگامی تشکیل شده است. این هسته شامل یک ساختار چندلایه است و هر لایه متشکل از ماتریس فلزی مس به عنوان فاز زمینه و گرافن-اورینگامی به عنوان فاز تقویت کننده می باشد. با فرض همگن و همسانگرد بودن هر لایه، توزیع درصد وزنی گرافن-اورینگامی در راستای ضخامت می تواند به دو صورت یکنواخت (UD) یا مدرج تابعی از نوع FG-X در نظر گرفته شود.

بر این اساس، کسر حجمی گرافن-اورینگامی $V_{Gr}(k)$ در لایه k -ام، برای الگوهای توزیع مختلف، به صورت زیر بیان می شود [۱۰]

$$\begin{aligned} \text{UD: } V_{Gr}(k) &= V_{Gr} \\ \text{FG-X: } V_{Gr}(k) &= 2V_{Gr}|2k - N_L - 1|/N_L \end{aligned} \quad (1)$$

که در این رابطه، N_L بیانگر تعداد لایه ها است. همچنین، کسر حجمی گرافن-اورینگامی بر حسب درصد وزنی آن W_{Gr} ، به صورت زیر تعریف می شود:

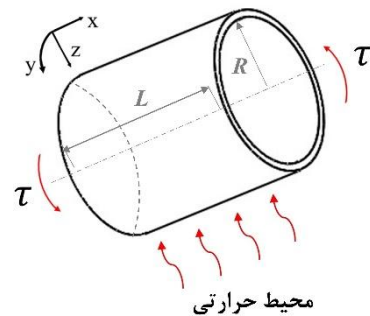
$$V_{Gr} = \frac{W_{Gr}}{W_{Gr} + (\rho_{Gr}/\rho_{Cu})(1 - W_{Gr})} \quad (2)$$

که در آن ρ_{Cu} و ρ_{Gr} به ترتیب چگالی مس و گرافن می باشند.

۲ مشخصات هندسی و مواد

۲-۱ هندسه مدل

شکل ۱، یک پوسته استوانه ای ساندویچی با شعاع R ، طول L و ضخامت کل h را نشان می دهد. این پوسته تحت بار پیچشی یکنواخت τ و همچنین شرایط محیطی حرارت افزایش یکنواخت دما قرار دارد. دستگاه مختصات (x, y, z) طوری در نظر گرفته شده است که مبدأ آن O بر روی لایه میانی و در یک انتهای پوسته قرار دارد. در این دستگاه، محور x در راستای طولی و محور y در راستای محیطی پوسته می باشند. ساختار ساندویچی مذکور شامل یک هسته فراکشسان با ضخامت h_2 و لایه های خارجی تقویت شده با نانولوله های کربنی است که هر یک دارای ضخامت h_1 می باشد. تصویر شماتیک این ساختار ساندویچی در شکل ۲ ارائه شده است.



شکل ۱ پوسته استوانه ای تحت بار پیچشی و محیط حرارتی

$$f_\alpha(V_{Gr}, T) = 0.794 - 16.8V_{Gr}^2 - 0.0279 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 + 0.182 \left(\frac{T}{T_0} \right) (1 + V_{Gr})$$

$$f_\rho(V_{Gr}, T) = 1.01 - 2.01V_{Gr}^2 - 0.0131 \left(\frac{T}{T_0} \right)$$

علاوه بر این، T_0 برابر با ۳۰۰ کلون بوده و T دمای محیط را نشان می‌دهد [۱۰ و ۱۱].

۲-۲-۲- لایه‌های خارجی تقویت‌شده با

نانولوله‌های کربنی

در پژوهش حاضر، نانولوله‌های کربنی با راستای محیطی و الگوی توزیع یکنواخت، درون یک ماتریس پلیمری و در امتداد ضخامت پوسته توزیع شده‌اند. ثوابت الاستیک ارتوتروپیک لایه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی، با استفاده از مدل توسعه‌یافته‌ی هالپین-تسای، به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۸ و ۱۹].

$$E_{11}^{CNTRC} = V_{ma}E_{ma} + \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT}$$

$$E_{22}^{CNTRC} = \eta_2 / \left(\frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_{ma}}{E_{ma}} \right) \quad (۶)$$

$$G_{12}^{CNTRC} = \eta_3 / \left(\frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_{ma}}{G_{ma}} \right)$$

$$\nu_{12}^{CNTRC} = V_{ma}\nu_{ma} + V_{CNT}\nu_{12}^{CNT}$$

در این رابطه، E_{11}^{CNTRC} ، E_{22}^{CNTRC} و G_{12}^{CNTRC} به ترتیب بیانگر مدول‌های الاستیسیته در راستای طولی و عرضی و نیز مدول برشی لایه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هستند. همچنین، E_{ma} و G_{ma} به ترتیب مدول الاستیسیته و مدول برشی ماده‌ی پایه (ماتریس) را نشان می‌دهند. کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و ماده‌ی پایه به ترتیب با ν_{12}^{CNT} و ν_{ma} هستند که شرط $V_{CNT} + V_{ma} = 1$ را برآورده می‌کنند. افزون بر این، $\eta_j (j = 1, 2, 3)$ پارامترهای کارایی نانولوله‌های کربنی را بیان می‌کند که بر اساس

خواص مکانیکی موثره‌سته، شامل مدول یانگ E_c ، نسبت پواسون ν_c ، ضریب انبساط حرارتی α_c ، و چگالی ρ_c ، به صورت زیر ارائه می‌شوند [۱۰ و ۱۱]

$$E_c = \frac{1 + \xi \eta V_{Gr}}{1 - \eta V_{Gr}} E_{Cu} \times f_E(H_{Gr}, V_{Gr}, T)$$

$$\nu_c = (\nu_{Gr} V_{Gr} + \nu_{Cu} V_{Cu}) \times f_\nu(H_{Gr}, V_{Gr}, T) \quad (۳)$$

$$\alpha_c = (\alpha_{Gr} V_{Gr} + \alpha_{Cu} V_{Cu}) \times f_\alpha(V_{Gr}, T)$$

$$\rho_c = (\rho_{Gr} V_{Gr} + \rho_{Cu} V_{Cu}) \times f_\rho(V_{Gr}, T)$$

که در آن η و ξ به ترتیب به عنوان ضرایب ماده و ضرایب ابعادی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۰ و ۱۱]

$$\eta = \frac{(E_{Gr}/E_{Cu}) - 1}{(E_{Gr}/E_{Cu}) + \xi} \quad (۴)$$

$$\xi = 2(l_{Gr}/t_{Gr})$$

که در آن l_{Gr} و t_{Gr} به ترتیب بیانگر ابعاد گرافن می‌باشند، به طوری که l_{Gr} طول و t_{Gr} ضخامت آن است؛ همچنین f_E ، f_ν ، f_α و f_ρ توابع اصلاحی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۰ و ۱۱]

$$f_E(H_{Gr}, V_{Gr}, T) = 1.11 - 1.22V_{Gr} - 0.134 \left(\frac{T}{T_0} \right) + 0.559V_{Gr} \left(\frac{T}{T_0} \right) - 5.5H_{Gr}V_{Gr} + 38H_{Gr}V_{Gr}^2 - 20.6H_{Gr}^2V_{Gr}^2 \quad (۵)$$

$$f_\nu(H_{Gr}, V_{Gr}, T) = 1.01 - 1.43V_{Gr} + 0.165 \left(\frac{T}{T_0} \right) - 16.8H_{Gr}V_{Gr} - 1.1H_{Gr}V_{Gr} \left(\frac{T}{T_0} \right) + 16H_{Gr}^2V_{Gr}^2$$

معادله سازگاری تغییرشکل نیز از رابطه (۹) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} \\ = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (10)$$

قانون هوک برای پوسته های استوانه ای ساندویچی با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما به صورت زیر بیان می شود [۳۳]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (12)$$

روابط نیرو و ممان برای پوسته ای استوانه ای ساندویچی به صورت زیر ارائه می شوند:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \end{aligned} \quad (13)$$

با جای گذاری رابطه (۸) در رابطه (۱۱) و سپس اعمال نتایج حاصل در رابطه (۱۳)، رابطه ساختاری زیر به دست می آید:

گزارش های ارائه شده در مراجع [۱۸، ۱۹] تعیین شده اند. ضرایب انبساط حرارتی در این لایه ها نیز به صورت زیر مرجع تعریف می شوند

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{CNTRC} &= \frac{V_{CNT} E_{11}^{CNT} \alpha_{11}^{CNT} + V_{ma} E_{ma} \alpha_{ma}}{V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_{ma} E_{ma}} \\ \alpha_{22}^{CNTRC} &= (1 + \nu_{12}^{CNT}) V_{CNT} \alpha_{22}^{CNT} \\ &\quad + (1 + \nu_{ma}) V_{ma} \alpha_{ma} - \nu_{12} \alpha_{11} \end{aligned} \quad (V)$$

۳ معادلات حاکم

در این پژوهش، برای استخراج معادلات حاکم از نظریه پوسته دانل همراه با روابط غیرخطی فون کارمن استفاده شده است. بر این اساس، مؤلفه های کرنش به صورت زیر بیان می شوند [۳۳]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{bmatrix} \quad (8)$$

همچنین روابط غیرخطی کرنش-جابجایی نیز به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن، ε_x^0 ، ε_y^0 و γ_{xy}^0 بیانگر مؤلفه های کرنش در لایه میانی هستند و u ، v و w به ترتیب جابه جایی ها در راستاهای x ، y و z را نشان می دهند.

به‌طوری که،

$$\begin{aligned}\hat{A}_{11} &= \frac{A_{11}}{\gamma}, \hat{A}_{12} = \frac{A_{12}}{\gamma}, \hat{A}_{22} = \frac{A_{22}}{\gamma}, \hat{A}_{66} = \frac{1}{A_{66}} \\ \hat{B}_{11} &= \hat{A}_{22}B_{11} - \hat{A}_{12}B_{12}, \hat{B}_{22} = \hat{A}_{11}B_{22} - \hat{A}_{12}B_{12}, \hat{B}_{12} = \hat{A}_{22}B_{12} - \hat{A}_{12}B_{22} \\ \hat{B}_{21} &= \hat{A}_{11}B_{12} - \hat{A}_{12}B_{11}, \hat{B}_{66} = \frac{B_{66}}{A_{66}} \\ \gamma &= A_{11}A_{22} - A_{12}^2\end{aligned}\quad (۱۸)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۴)، روابط گشتاور خمشی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}M_x &= \hat{B}_{11}N_x + \hat{B}_{21}N_y - \hat{D}_{11}\kappa_x - \hat{D}_{12}\kappa_y \\ &\quad + B_{11}^*\psi_{1x} + \hat{B}_{21}\psi_{1y} - \psi_{2x} \\ M_y &= \hat{B}_{12}N_x + \hat{B}_{22}N_y - \hat{D}_{21}\kappa_x - \hat{D}_{22}\kappa_y \\ &\quad + \hat{B}_{12}\psi_{1x} + \hat{B}_{22}\psi_{1y} - \psi_{2y} \\ M_{xy} &= \hat{B}_{66}N_{xy} - 2\hat{D}_{66}\kappa_{xy}\end{aligned}\quad (۱۹)$$

به‌طوری که،

$$\begin{aligned}\hat{D}_{11} &= D_{11} - B_{11}\hat{B}_{11} - B_{12}\hat{B}_{21}, \hat{D}_{22} = \\ &D_{22} + B_{11}\hat{B}_{12} - B_{22}\hat{B}_{22} \\ \hat{D}_{12} &= D_{12} - B_{11}\hat{B}_{12} - B_{12}\hat{B}_{22}, \hat{D}_{21} = \\ &D_{12} - B_{12}\hat{B}_{11} - B_{22}\hat{B}_{21} \\ \hat{D}_{66} &= D_{66} - B_{66}\hat{B}_{66}\end{aligned}\quad (۲۰)$$

معادلات غیرخطی حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی در چارچوب نظریه پوسته دائل و با در نظر گرفتن فرضیات هندسی غیرخطی فون‌کارمن، به‌صورت زیر ارائه می‌شوند [۳۲]:

$$\begin{aligned}N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0\end{aligned}\quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ -\chi_x \\ -\chi_y \\ -2\chi_{xy} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \psi_{1x} \\ \psi_{1y} \\ 0 \\ \psi_{2x} \\ \psi_{2y} \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (۱۴)$$

که در آن، A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سفتی پوسته هستند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (۱۵)$$

همچنین، ψ_{1x} ، ψ_{1y} ، ψ_{2x} و ψ_{2y} مؤلفه‌های حرارتی را نشان می‌دهند که به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}\psi_{1x} &= \int_{\Pi} [Q_{11}\alpha_{11} + Q_{12}\alpha_{22}] \Delta T \, dz \\ \psi_{1y} &= \int_{\Pi} [Q_{12}\beta_{11} + Q_{22}\beta_{22}] \Delta T \, dz\end{aligned}\quad (۱۶)$$

کرنش‌های نرمال و برشی در لایه میانی پوسته، با معکوس‌سازی روابط ارائه‌شده در معادله (۱۴)، به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \hat{A}_{22}N_x - \hat{A}_{12}N_y + \hat{B}_{11}\kappa_x + \hat{B}_{12}\kappa_y \\ &\quad + \hat{A}_{22}\psi_{1x} - \hat{A}_{12}\psi_{1y} \\ \varepsilon_y^0 &= \hat{A}_{11}N_y - \hat{A}_{12}N_x + \hat{B}_{21}\kappa_x + \hat{B}_{22}\kappa_y \\ &\quad - \hat{A}_{12}\psi_{1x} + \hat{A}_{11}\psi_{1y} \\ \gamma_{xy}^0 &= N_{xy}\hat{A}_{66} + 2\hat{B}_{66}\chi_{xy}\end{aligned}\quad (۱۷)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + \frac{N_y}{R} = 0$$

۴ حل معادلات حاکم

شرایط مرزی برای پوسته‌های استوانه‌ای با لبه‌های تکیه‌گاه ساده به صورت زیر بیان می‌شود [۳۰]:

$$w = 0, N_x = 0, M_x = 0, N_{xy} = -\tau h \quad (25)$$

$$x = 0; L$$

تابع خیزی که شرایط مرزی مذکور را ارضا می‌کند، با استفاده از یک رابطه مثلثاتی به صورت زیر بیان می‌شود [۳۰]:

$$w = \xi_0 + \xi_1 \sin \alpha x \sin \beta (y - \lambda x) + \xi_2 \sin^2 \alpha x \quad (26)$$

که در این رابطه، $\xi_i (i = 1, \dots, 3)$ دامنه‌های خیز را نشان می‌دهند. همچنین $\alpha = \frac{m\pi}{L}$ و $\beta = \frac{n}{R}$ که در آن m و n به ترتیب بیانگر موده‌های کمانش در راستاهای x و y هستند. افزون بر این، λ تانژانت زاویه بین راستای بدون تغییر مکان و راستای محوری را بیان می‌کند.

شکل کلی تابع تنش F ، با جایگذاری تابع خیز w در رابطه (۲۴) و ساده‌سازی، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = A_1 \cos 2\alpha x + A_2 \cos 2\beta (y - \lambda x) + A_3 \cos \beta \left[x \left(\frac{\alpha}{\beta} - \lambda \right) + y \right] \quad (27)$$

در ادامه، تابع تنش $F(x, y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۰]:

$$N_x = F_{,yy}, N_y = F_{,xx}, N_{xy} = -F_{,xy} \quad (22)$$

با جایگذاری روابط (۲۲) و (۱۹) در رابطه (۲۱)، رابطه تعادل به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \hat{D}_{11} w_{,xxxx} + (\hat{D}_{12} + \hat{D}_{21} + 4\hat{D}_{66}) w_{,xxyy} \\ & + \hat{D}_{22} w_{,yyyy} + \hat{B}_{21} F_{,xxxx} \\ & - (\hat{B}_{11} + \hat{B}_{22} - 2\hat{B}_{66}) F_{,xxyy} \\ & - \hat{B}_{12} F_{,yyyy} - \frac{1}{R} F_{,xx} \\ & - F_{,yy} w_{,xx} - F_{,xx} w_{,yy} \\ & + 2F_{,xy} w_{,xy} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

همچنین، با جایگذاری روابط (۲۲) و (۱۹) در رابطه سازگاری (۱۰)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \hat{A}_{11} F_{,xxxx} + (\hat{A}_{66} - 2\hat{A}_{12}) F_{,xxyy} \\ & + \hat{A}_{22} F_{,yyyy} + \hat{B}_{21} w_{,xxxx} \\ & + (\hat{B}_{11} + \hat{B}_{22} - 2\hat{B}_{66}) w_{,xxyy} \\ & + \hat{B}_{12} w_{,yyyy} - w_{,xy}^2 \\ & + w_{,xx} w_{,yy} + \frac{1}{R} w_{,xx} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

دستگاه معادلات غیرخطی حاکم ارائه شده در روابط (۲۳) و (۲۴)، که شامل دو متغیر w و F می‌باشد، به منظور بررسی رفتار کمانش و پس کمانش پوسته‌های ساندویچی تحت بار پیچشی در شرایط محیط حرارتی به کار گرفته می‌شود.

با استفاده از روابط (۹)، (۲۶) و (۲۷)، می‌توان این انتگرال را به شکل زیر نوشت:

$$2\xi_0 + \xi_2 - \frac{1}{4}\beta^2\xi_1^2R + 2R(\hat{A}_{11}\psi_{1y} - A_{12s}\psi_{1x}) = 0 \quad (32)$$

با حذف ξ_0 از روابط (۲۹)، (۳۰) و (۳۲)، رابطه بین τ و ξ_1 ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{-1}{2h\beta^2\lambda} \left[X_1 + \xi_1^2 X_3 + \frac{\xi_1^4 X_4 X_6^2}{(X_5 + \xi_1^2 X_7)^2} + \frac{\xi_1^2 X_2 X_6}{X_5 + \xi_1^2 X_7} \right] \quad (33)$$

با اعمال $\xi_1 \rightarrow 0$ ، بار بحرانی کمانش خطی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau^{upper} = \frac{-X_1}{2h\lambda\beta^2} \quad (34)$$

علاوه بر این، با استفاده از رابطه (۲۶)، پیشینه‌ی خیز پوسته‌ها را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$W_{\max} = \left\{ X_5(8\xi_1 + R\beta^2\xi_1^2 + 8\hat{A}_{12}R\psi_{1x} - 8\hat{A}_{11}R\psi_{1y}) + \xi_1^2(4X_6 + X_7(8\xi_1 + R\beta^2\xi_1^2 + 8\hat{A}_{12}R\phi_{1x} - 8\hat{A}_{11}R\phi_{1y})) \right\} \times (8(X_5 + X_7\xi_1^2))^{-1} \quad (35)$$

زاویه پیچش ϕ به صورت میانگین، به صورت زیر تعیین می‌شود [۲۶]

$$+ A_4 \cos \beta \left[y - x \left(\frac{\alpha}{\beta} + \lambda \right) \right] + A_5 \cos \beta \left[y - x \left(\frac{3\alpha}{\beta} + \lambda \right) \right] + A_6 \cos \beta \left[x \left(\frac{3\alpha}{\beta} - \lambda \right) + y \right] - \tau h x y$$

به طوری که

$$A_1 = J_1\xi_2 + J_2\xi_1^2, A_2 = J_3\xi_1^2, A_3 = \xi_1(J_4 + J_5\xi_2) \\ A_4 = \xi_1(J_6 + J_7\xi_2), A_5 = \xi_1\xi_2J_8, A_6 = J_9\xi_1\xi_2, \quad (28)$$

و ضرایب $J_k (k = 1, \dots, 9)$ در پژوهش دانگ و همکاران [۲۲] ارائه شده است. در ادامه، با جای‌گذاری توابع خیز و تنش در رابطه‌ی حاکم (۲۱) و به کارگیری روش گلرکین، دستگاه معادلات جبری زیر به دست می‌آید:

$$2\tau h\beta^2\lambda + X_1 + X_2\xi_2 + X_3\xi_1^2 + X_4\xi_2^2 = 0 \quad (29)$$

$$-X_6\xi_1^2 + X_5\xi_2 + X_7\xi_1^2\xi_2 = 0 \quad (30)$$

که در این روابط، ضرایب $X_i (i = 1, \dots, 7)$ در پژوهش دانگ و همکاران [۲۲] ارائه شده است. افزون بر این، از آنجا که پوسته استوانه‌ای در راستای محیطی دارای ساختار بسته می‌باشد، میدان تغییرمکان باید شرط سازگاری محیطی را ارضا کند تا پیوستگی هندسی پوسته پس از تغییر شکل حفظ شود. لذا شرط بسته بودن محیطی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۶]:

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L v_y dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(\varepsilon_y^0 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) dx dy = 0 \quad (31)$$

مثال ۱: در نخستین مثال، صحت‌سنجی رویکرد حاضر از طریق مقایسه بارهای بحرانی کمانش و منحنی‌های پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی، تحت بار پیچشی و با در نظر گرفتن هسته‌های مختلف از جنس پلی‌متیل‌متاکریلات و لانه‌زنبوری ری‌انترانت، ارزیابی شده است. مقایسه نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج گزارش‌شده توسط دانگ و همکاران [۲۲]، که در جدول ۱ ارائه شده‌اند، دقت و قابلیت اعتماد رویکرد پیشنهادی را تأیید می‌کند. افزون بر این، پاسخ غیرخطی پس‌کمانش، همان‌گونه که در شکل ۳ نشان داده شده است، بیانگر تطابق مناسب منحنی‌های پس‌کمانش حاصل از رویکرد حاضر با نتایج موجود در ادبیات موضوع بوده و صحت آن را نشان می‌دهد.

مثال ۲: در مثالی دیگر، دقت مدل تحلیلی از طریق مقایسه بار بحرانی کمانش پوسته‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی، تحت بار پیچشی در محیط‌های حرارتی، مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این راستا، نتایج حاصل از پژوهش حاضر با مقادیر گزارش‌شده توسط وان تین و همکاران [۲۰]، همان‌گونه که در جدول ۲ ارائه شده‌اند، مقایسه شده است. بررسی نتایج، صحت و دقت مدل نظری ارائه‌شده را تأیید می‌کند.

$$\phi = \frac{1}{2\pi RL} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (36)$$

$$= \frac{\beta^2 \lambda \zeta_1^2}{4} + \tau h \hat{A}_{66}$$

منحنی‌های پس‌کمانش پوسته‌های ساندویچی $(W_{max}/h - \tau)$ با ترکیب روابط (۳۳) و (۳۵) به‌دست می‌آید، که از طریق آن‌ها می‌توان پاسخ گشتاور پیچشی τ و خیز بیشینه بدون بعد را ارزیابی کرد. به‌طور مشابه، با ترکیب روابط (۳۳) و (۳۶)، رابطه بین گشتاور پیچشی τ و زاویه پیچشی ϕ پوسته‌ها نیز قابل بررسی است.

۵ تجزیه و تحلیل داده‌ها

۵-۱- صحت‌سنجی نتایج

به‌منظور اطمینان از صحت رویکرد ارائه‌شده، در این بخش اعتبارسنجی جامعی از روش پیشنهادی انجام می‌گیرد.

جدول ۱ بار بحرانی کمانش (T_{cr}) (مگاپاسکال) پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی
($m = 1, T = 300 \text{ K}, L = 1.5R, R/h=80, h=2 \text{ mm}$)

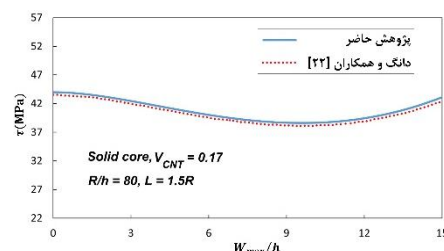
V_{CNT}	هسته پلیمری			هسته فراکشسان لانه‌زنبوری		
	میزان	پژوهش	دانگ و همکاران [۲۲]	میزان	پژوهش	دانگ و همکاران [۲۲]
	اختلاف (%)	حاضر	همکاران [۲۲]	اختلاف (%)	حاضر	همکاران [۲۲]
0.12	1.29	22.2944	22.01	0.92	31.5185	31.23
		(5, 1.18102)	(5, 1.19)		(5, 0.928328)	(5, 0.93)*
0.17	1.35	34.8329	34.37	1.05	43.9881	43.53
		(5, 1.11734)	(5, 1.13)		(5, 0.952027)	(5, 0.96)
0.28	1.23	47.3329	46.76	0.99	57.9493	57.38
		(4, 1.02144)	(5, 1.30)		(5, 1.1055)	(5, 1.11)

*اعداد داخل پرانتز نشان‌دهنده موده‌های کمانش (n, λ) هستند.

جدول ۲ بار بحرانی کمانش (τ_{cr}) (مگاپاسکال) پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی ($\Delta T = 300K, L = 1.5R, R/h = 80, h = 2 \text{ mm}$).

V_{CNT}	ون‌تین و همکاران [20]	پژوهش حاضر	میزان اختلاف (%)
0.12	31.23 (5,0.93)	31.5185 (5,0.928328)	0.92
0.17	43.53 (5,0.96)	43.9881 (5,0.952027)	1.05
0.28	57.38 (5,1.11)	57.9493 (5, 1.1055)	0.99

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{CN} &= (6.18387 - 0.00286T + 4.22867 \times 10^{-6}T^2 - 2.2724 \times 10^{-9}T^3) \text{TPa} \\
 E_{22}^{CN} &= (7.75348 - 0.00358T + 5.30057 \times 10^{-6}T^2 - 2.84868 \times 10^{-9}T^3) \text{TPa} \\
 G_{12}^{CN} &= (1.80126 + 7.7845 \times 10^{-4}T - 1.1279 \times 10^{-6}T^2 + 4.93484 \times 10^{-10}T^3) \text{TPa} \\
 \alpha_{11}^{CN} &= (-1.12148 + 0.02289T - 2.88155 \times 10^{-5}T^2 + 1.13253 \times 10^{-8}T^3) \times 10^{-6}/K \\
 \alpha_{22}^{CN} &= (5.43874 - 9.95498 \times 10^{-4}T + 3.13525 \times 10^{-7}T^2 - 3.56332 \times 10^{-12}T^3) \times 10^{-6}/K
 \end{aligned} \quad (38)$$



شکل ۳ مقایسه منحنی‌های پس کمانش

۵-۲- ارائه نتایج و بحث و بررسی آنها

علاوه‌براین، نسبت پواسون نانولوله‌های کربنی (ν_{12}^{CNT}) مقدار ثابت ۰.۱۷۵ می‌باشد. همچنین پارامترهای اثرگذاری نانولوله‌های کربنی η_i ($i = 1, \dots, 3$) برای مقادیر مختلف از کسر حجمی نانولوله‌ها، به‌صورت زیر تعیین می‌شود [۱۸ و ۱۹]

جدول ۳ پارامترهای کارایی نانولوله‌های کربنی

V_{CNT}	η_1	η_2	η_3
0.12	0.137	1.022	0.715
0.17	0.142	1.626	1.138
0.28	0.141	1.585	1.109

مقایسه‌ی بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی تحت بار پیچشی در محیط حرارتی، برای مقادیر مختلف پارامترهای گرافن-اورینگامی، شامل درجه‌ی تابندگی (H_{Gr}) و درصد وزنی (W_{Gr})، با در نظر گرفتن الگوهای مختلف توزیع (یکنواخت و مدرج تابعی) و نیز مقادیر مختلف افزایش دما (ΔT)، در جداول ۴ و ۵ ارائه شده‌است. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که افزایش درصد وزنی گرافن-اورینگامی در ساختار پوسته‌ها، موجب افزایش

در این پژوهش، خواص مکانیکی لایه‌های خارجی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی مطابق با گزارش شن [۱۸ و ۱۹] در نظر گرفته شده‌است. در تمامی تحلیل‌ها، ضخامت لایه‌های خارجی برابر با ۱ میلی‌متر در فرض شده‌است. علاوه‌براین ماده‌ی پایه (ماتریس) در لایه‌های خارجی، از جنس پلیمر پلی‌متیل متاکریلات و نانولوله‌های کربنی تک‌جداره فرض شده‌است. خواص مکانیکی ماتریس وابسته به دما بوده و به صورت زیر ارائه می‌شود [۱۸ و ۱۹]

$$\begin{aligned}
 \alpha^m &= 45(1 + 0.0005\Delta T) \times 10^{-6}/K \\
 E^m &= (3.52 - 0.0034T) \text{ GPa}
 \end{aligned} \quad (39)$$

همچنین خواص مکانیکی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره، که وابسته به دما فرض می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۸ و ۱۹]

در بار بحرانی کمانش می‌گردد. به عنوان مثال، برای حالتی با درصد وزنی گرافن $W_{Gr} = 2.5\%$ ، افزایش ۶۰ درجه در میزان تاشدگی باعث کاهش ۹٪ در بار بحرانی کمانش پوسته با توزیع یکنواخت گرافن-اورینگامی و کاهش ۱٪ برای پوسته با توزیع مدرج تابعی FG-X می‌گردد. علاوه بر این، شکل‌های ۶ و ۷ منحنی‌های پس‌کمانش $\phi - \tau$ و $W_{max}/h - \tau$ پوسته‌های با توزیع مدرج تابعی FG-X را در درجات مختلف تاشدگی گرافن-اورینگامی نمایش می‌دهند. نتایج حاکی از آن است که با افزایش پارامتر تاشدگی H_{Gr} ، ظرفیت باربری در ناحیه پس‌کمانش کاهش می‌یابد. به طور کلی، علت این پدیده آن است که افزایش H_{Gr} ، اگرچه موجب تقویت رفتار فراکشسانی و افزایش نسبت پواسون منفی می‌شود، اما به طور هم‌زمان باعث افزایش میزان ساختار سلولی در هسته نیز می‌گردد. این افزایش ساختار سلولی منجر به کاهش سفتی مؤثر و کاهش مدول ینگ معادل هسته در حالت تنش صفحه‌ای می‌شود. در نتیجه، سفتی کلی پوسته کاهش یافته و بار بحرانی کمانش و همچنین ظرفیت رفتار پس‌کمانش با افتی جزئی همراه خواهد بود. بنابراین، انتخاب بهینه درصد تاشدگی می‌تواند ضمن حفظ ویژگی‌های فراکشسانی، استحکام و عملکرد سازه‌ای مناسبی را نیز تأمین نماید.

همچنین، مقایسه نتایج ارائه‌شده در جداول ۴ و ۵ برای الگوهای مختلف توزیع گرافن-اورینگامی در ساختار هسته نشان می‌دهد که توزیع تابعی FG-X، در مقایسه با توزیع یکنواخت، همواره عملکرد کمانشی بهتری از خود نشان داده و پایداری بیشتری برای سازه فراهم می‌کند.

قابل‌ملاحظه بار بحرانی کمانش می‌شود. به عنوان نمونه، در پوسته‌های ساندویچی تقویت‌شده با الگوی توزیع یکنواخت گرافن-اورینگامی، افزودن گرافن با درصد وزنی اولیه $W_{Gr} = 1\%$ ، به هسته مس خالص ($W_{Gr} = 0$) با در نظر گرفتن درصد تاشدگی ثابت گرافن-اورینگامی $H_{Gr} = 20\%$ ، منجر به بهبود ۴.۸۶ درصدی بار بحرانی کمانش پوسته ساندویچی می‌گردد. با افزایش درصد وزنی گرافن به $W_{Gr} = 2.5\%$ ، میزان این بهبود به ۲۴ درصد می‌رسد. این افزایش عملکرد کمانشی در پوسته‌های ساندویچی با توزیع مدرج تابعی FG-X چشمگیرتر بوده، به گونه‌ای که افزایش W_{Gr} در شرایط مشابه، باعث افزایش بار بحرانی کمانش تا ۳۰.۵۱ درصد می‌شود. افزون بر این، منحنی‌های پس‌کمانش $\phi - \tau$ و $W_{max}/h - \tau$ پوسته‌های ساندویچی در مقادیر مختلف گرافن-اورینگامی (شکل‌های ۴ و ۵) به خوبی نقش کلیدی این هسته را در بهبود رفتار پس‌کمانش پوسته‌های ساندویچی نشان می‌دهند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، افزایش درصد وزنی گرافن-اورینگامی با افزایش ظرفیت تحمل بار پس از کمانش همراه بوده و منحنی‌ها با افزایش این پارامتر، روندی صعودی از خود نشان می‌دهند. به طور کلی، این بهبود در پایداری سازه ناشی از تبدیل هسته به یک فراماده با رفتار فراکشسان است؛ به گونه‌ای که با افزایش مقدار گرافن-اورینگامی در ماتریس، مدول ینگ و قابلیت فراکشسانی افزایش یافته و در نتیجه، سفتی سازه بیشتر شده و رفتار کمانش و پس‌کمانش آن بهبود می‌یابد.

از سوی دیگر، در بررسی تأثیر درصد تاشدگی گرافن-اورینگامی، نتایج نشان می‌دهد که افزایش این پارامتر منجر به کاهش اندکی

جدول ۴ اثرات افزایش دما، درصد وزنی گرافن-اورینگامی (W_{Gr})، و درجه تاشدگی (H_{Gr}) بر بار بحرانی کمانش (T_{cr}) (مگاپاسکال) پوسته‌های ساندویچی تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی با الگوی توزیع یکنواخت.

$(R = 0.32, L = 1.5R, h_2 = 2 \text{ mm})$					
$\Delta T = (\text{K})$	$W_{Gr}(\text{wt}\%)$	$H_{Gr}(\%)$			
		0	20	40	60
0		157.423 (8, 0.664443)			

0	1	169.007 (8, 0.66202)	165.074 (8, 0.666887)	161.268 (8, 0.672563)	157.474 (8, 0.67922)
	1.5	180.619 (8, 0.635495)	175.42 (8, 0.640088)	170.348 (8, 0.646326)	165.11 (8, 0.654621)
	2.5	200.845 (8, 0.596804)	195.343 (8, 0.597147)	189.53 (8, 0.601227)	182.636 (8, 0.609882)
	0	137.408 (7, 0.651428)			
50	1	166.466 (8, 0.665747)	162.451 (8, 0.670886)	158.578 (8, 0.676862)	154.725 (8, 0.683862)
	1.5	178.093 (8, 0.638549)	172.782 (8, 0.643406)	167.623 (8, 0.649957)	162.31 (8, 0.658644)
	2.5	198.464 (8, 0.59882)	192.798 (8, 0.599297)	186.873 (8, 0.603583)	179.887 (8, 0.612567)
	0	134.95 (7, 0.656576)			
100	1	164.047 (8, 0.669964)	159.949 (8, 0.6754)	156.008 (8, 0.681701)	152.094 (8, 0.689074)
	1.5	175.698 (8, 0.642032)	170.272 (8, 0.647176)	165.024 (8, 0.654065)	159.634 (8, 0.663175)
	2.5	196.226 (8, 0.601188)	190.395 (8, 0.601808)	184.358 (8, 0.606313)	177.278 (8, 0.615648)
	0				

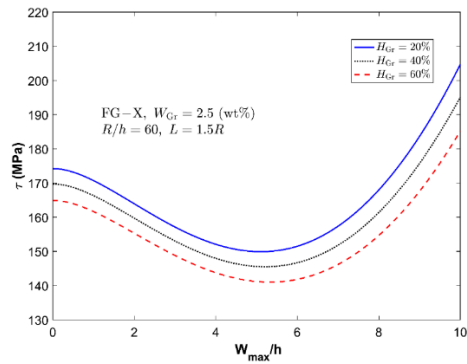
جدول ۵ اثرات افزایش دما، درصد وزنی گرافن-اورینگامی (W_{Gr})، و درجه تاشدگی (H_{Gr}) بر بار بحرانی کمانش (T_{Cr}) (مگاپاسکال)

پوسته‌های ساندویچی تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی با الگوی توزیع مدرج تابعی FG-X.

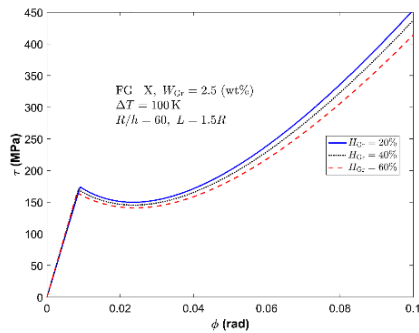
($R = 0.32$, $L = 1.5R$, $h_2 = 2 \text{ mm}$)

$\Delta T = (K)$	$W_{Gr}(wt\%)$	$H_{Gr}(\%)$			
		0	20	40	60
0	0	157.423 (8, 0.664443)			
	1	171.497 (8, 0.660637)	167.189 (8, 0.664668)	163.237 (8, 0.669476)	159.323 (8, 0.675465)
	1.5	183.927 (8, 0.634575)	179.244 (8, 0.63616)	174.918 (8, 0.639396)	170.257 (8, 0.645074)
	2.5	205.236 (8, 0.597228)	205.456 (8, 0.58775)	205.36 (8, 0.582365)	203.863 (8, 0.581629)
50	0				
	1	169 (8, 0.66416)	164.59 (8, 0.668465)	160.565 (8, 0.673555)	156.589 (8, 0.67987)
	1.5	181.506 (8, 0.637358)	176.685 (8, 0.639131)	172.269 (8, 0.642578)	167.535 (8, 0.64854)
	2.5				

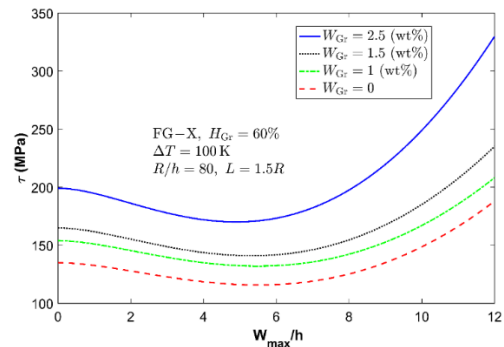
	2.5	203.145 (8, 0.598831)	203.169 (8, 0.589266)	202.973 (8, 0.583817)	201.436 (8, 0.583057)
	0				
	1	166.628 (8, 0.668163)	162.114 (8, 0.672756)	158.013 (8, 0.678154)	153.974 (8, 0.684826)
100	1.5	179.219 (8, 0.640545)	174.256 (8, 0.642525)	169.749 (8, 0.646201)	164.94 (8, 0.65247)
	2.5	201.201 (8, 0.600758)	201.027 (8, 0.591103)	200.734 (8, 0.585584)	199.159 (8, 0.584794)



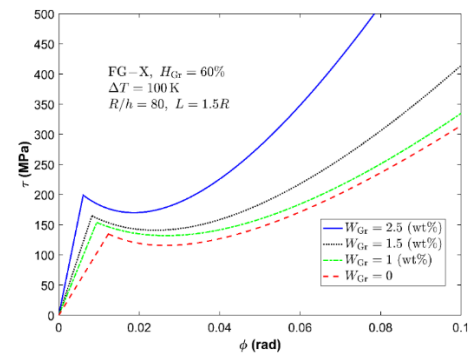
شکل ۶ تأثیر درصد تاشدگی گرافن-اورینگامی بر رفتار پس کمانش پوسته ساندوچی $W_{max}/h - \tau$



شکل ۷ تأثیر درصد تاشدگی گرافن-اورینگامی بر رفتار پس کمانش $\phi - \tau$ پوسته ساندوچی



شکل ۴ تأثیر درصد تاشدگی گرافن-اورینگامی بر رفتار پس کمانش پوسته ساندوچی $W_{max}/h - \tau$



شکل ۵ تأثیر درصد وزنی گرافن-اورینگامی بر رفتار کمانشی $\phi - \tau$ پوسته ساندوچی

بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دما، رفتار پس‌کمانش سازه از پایداری کمتری برخوردار بوده و منحنی‌ها در سطوح پایین‌تری قرار می‌گیرند. به‌طور کلی، این کاهش پایداری عمدتاً ناشی از وابستگی خواص مواد به دما است. افزایش دما با تضعیف خواص مکانیکی و کاهش مدول‌های الاستیسیته، موجب افت سفتی و پایداری کلی سازه شده و در نهایت به کاهش ظرفیت باربری آن می‌انجامد. افزون بر این، به‌دلیل محدود شدن ظرفیت جذب انرژی ناشی از کرنش‌های غشایی، بروز ناپایداری‌های ناگهانی از نوع اسنپ‌ترو (Snap-through) نیز در سازه مشاهده می‌شود.

۶ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی تحت اثر بار پیچشی و افزایش یکنواخت دما مورد بررسی قرار گرفته‌است. ساختار پوسته شامل هسته‌ی فراکشسان تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی و لایه‌های خارجی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی است. تحلیل‌ها در چارچوب نظریه پوسته دونل و با در نظر گرفتن فرضیات هندسی غیرخطی فون کارمن انجام شده و معادلات غیرخطی حاکم با استفاده از روش گالرکین حل شده‌اند. بر اساس نتایج عددی، مهم‌ترین یافته‌ها به‌صورت زیر خلاصه می‌شوند:

۱. افزایش درصد وزنی گرافن-اورینگامی منجر به افزایش

قابل‌ملاحظه بار بحرانی کمانش می‌شود؛ به‌طوری‌که

این بهبود در پوسته‌های با توزیع مدرج تابعی FG-X

نسبت به توزیع یکنواخت چشمگیرتر است. افزون بر

این، تحلیل منحنی‌های پس‌کمانش نشان می‌دهد که

افزایش درصد وزنی گرافن-اورینگامی موجب افزایش

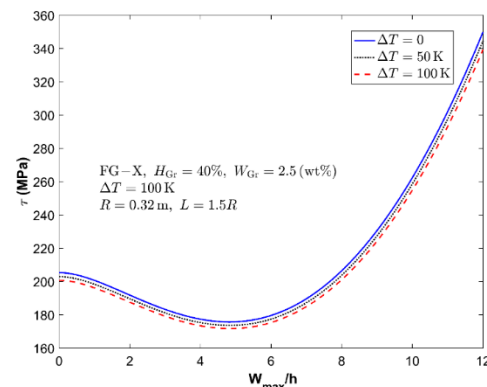
ظرفیت تحمل بار و بهبود پایداری پوسته‌ها می‌گردد.

۲. افزایش درصد تاشدگی گرافن-اورینگامی موجب

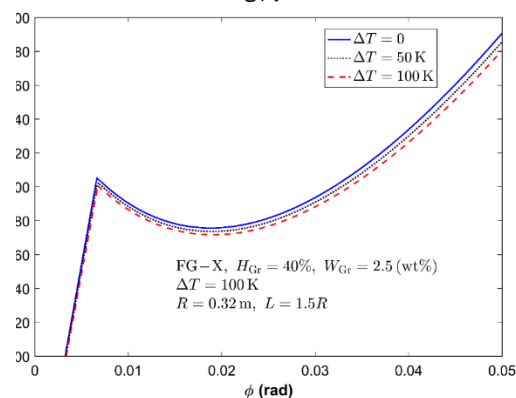
کاهش جزئی بار بحرانی و ظرفیت پس‌کمانش می‌شود،

زیرا با افزایش ساختار سلولی هسته، سفتی مؤثر پوسته

کاهش می‌یابد. با این حال، در تمامی حالت‌های



شکل ۸ تأثیر افزایش دما بر رفتار پس‌کمانش $W_{max}/h - \tau$ پوسته ساندویچی



شکل ۹ تأثیر افزایش دما بر رفتار پس‌کمانش $\phi - \tau$ پوسته ساندویچی

بررسی نتایج ارائه‌شده در جداول ۴ و ۵ در چارچوب تحلیل رفتار حرارتی سازه حاکی از آن است که افزایش دما موجب کاهش پایداری سازه می‌شود. به‌عنوان نمونه، در حالتی که مقادیر $W_{Gr} = 2.5\%$ و $H_{Gr} = 60\%$ در نظر گرفته شده‌اند، افزایش دما به میزان ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد نسبت به دمای محیط اولیه، منجر به کاهش ۲.۳۱ درصدی بار بحرانی کمانش در پوسته‌های ساندویچی تقویت‌شده با الگوی توزیع یکنواخت اورینگامی-گرافن و کاهش ۲.۹۳ درصدی در پوسته‌های ساندویچی با توزیع FG-X می‌شود. علاوه بر این، منحنی‌های پس‌کمانش $\phi - \tau$ و $W_{max}/h - \tau$ پوسته‌های ساندویچی در شکل‌های ۸ و ۹ مورد

کاهش سفتی سازه و محدود شدن ظرفیت جذب انرژی، بار بحرانی کماتش کاهش یافته و منحنی‌های پس کماتش در سطوح پایین‌تری قرار می‌گیرند.

بررسی شده، پوسته‌های تقویت‌شده با گرافن-اورینگامی در مقایسه با پوسته‌های دارای هسته‌ی مسی خالص، همواره عملکرد کماتشی برتری از خود نشان داده‌اند. ۳. بررسی الگوهای مختلف توزیع گرافن در هسته نشان می‌دهد که توزیع مدرج تابعی FG-X نسبت به توزیع یکنواخت، عملکرد کماتشی بهتر و پایداری بالاتری برای پوسته‌های ساندویچی فراهم می‌کند. ۴. افزایش دما موجب کاهش پایداری کماتشی و پس کماتشی پوسته‌های ساندویچی می‌شود؛ به‌طوری‌که با تضعیف خواص مکانیکی وابسته به دما،

منابع

- [8] Li C, Shen HS, Yang J. Low-velocity impact response of cylindrical sandwich shells with auxetic 3D double-V meta-lattice core and FG GRC facesheets. *Ocean Engineering*. 2022 Oct 15;262:112299.
- [9] Li C, Shen HS, Wang H. Nonlinear dynamic response of sandwich plates with functionally graded auxetic 3D lattice core. *Nonlinear Dynamics*. 2020 Jun;100(4):3235-52.
- [10] Zhao S, Zhang Y, Zhang Y, Zhang W, Yang J, Kitipornchai S. Genetic programming-assisted micromechanical models of graphene origami-enabled metal metamaterials. *Acta Materialia*. 2022 Apr 15;228:117791.
- [11] Zhao, S., Zhang, Y., Zhang, Y., Yang, J., & Kitipornchai, S. (2022b). Vibrational characteristics of functionally graded graphene origami-enabled auxetic metamaterial beams based on machine learning assisted models. *Aerospace Science and Technology*, 130, 107906.
- [12] Zhao, S., Zhang, Y., Wu, H., Zhang, Y., & Yang, J. (2022). Functionally graded graphene origami-enabled auxetic metamaterial beams with tunable buckling and postbuckling resistance. *Engineering Structures*, 268, 114763.
- [13] Ebrahimi F, Goudarzfallahi M, Alinia Ziazi A. Buckling and postbuckling analysis of graphene origami-enabled auxetic metamaterial sandwich toroidal shell segments subjected to axial compression. *Journal of Engineering Mechanics*. 2025 May 1;151(5):04025012.
- [14] Ebrahimi F, Goudarzfallahi M, Ziazi AA. Buckling and post-buckling analysis of sandwich toroidal shell segments with graphene origami-enabled auxetic metamaterial core under combined mechanical
- [1] Lakes R. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1987 Feb 27;235(4792):1038-40.
- [2] Ebrahimi F. *Mechanics of auxetic materials and structures*. CRC Press; 2024 May 2.
- [3] Yifeng Z, Rong L, Hien PL, Xiaoquan L, Yuxin T. Energy absorption characteristics of butterfly-shaped multi-cellular honeycomb structures under compressive loading. *InStructures* 2025 May 1 (Vol. 75, p. 108765). Elsevier.
- [4] Wang X, Fu T. Improvement of broadband low-frequency sound insulation of sandwich plates with negative Poisson's ratio butterfly-shaped auxetic cellular. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2024 Sep 1;166:105852.
- [5] Etemadi E, Hosseinabadi M, Scarpa F, Hu H. Design, FDM printing, FE and theoretical analysis of auxetic structures consisting of arc-shaped and Dumbell-shaped struts under quasi-static loading. *Composite Structures*. 2023 Dec 15;326:117602.
- [6] Fu T, Wang X, Hu X, Rabczuk T. Impact dynamic response of stiffened porous functionally graded materials sandwich doubly-curved shells with Arc-type auxetic core. *International Journal of Impact Engineering*. 2024 Sep 1;191:105000.
- [7] Ebrahimi F, Parsi M. A novel smart energy harvester with Arc-type auxetic cellular core. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2025 May 8;105716.

- environments. *Thin-Walled Structures*. 2020 Jan 1;146:106428.
- [24] Zhao LC, Xu L, Zeng HT. Thermal buckling of temperature-dependent FG-CNT reinforced composite conical-conical joined shell using GDQ. *Thin-Walled Structures*. 2024 Dec 1;205:112320.
- [25] Sofiyev AH, Kuruoglu NU. Buckling analysis of shear deformable composite conical shells reinforced by CNTs subjected to combined loading on the two-parameter elastic foundation. *Defence Technology*. 2022 Feb 1;18(2):205-18.
- [26] Goudarzfalahi M, Ebrahimi F, Ziazi AA. Assessing thermomechanical stability characteristics of shear deformable sandwich composite toroidal shells with bio-inspired auxetic core. *Advances in nano research*. 2025 Jan;19(1):13-27.
- [27] Goudarzfalahi M, Ziazi AA, Ebrahimi F. Third-order shear deformable porous metamaterial toroidal shells with arc-type auxetic core: A stability analysis. *Advances in aircraft and spacecraft science*. 2025 Jan;12(2):177-95.
- [28] Ebrahimi F, Goudarzfalahi M, Ziazi AA. Nonlinear stability analysis of shear-deformable sandwich meta-composite shell with arc-type auxetic core. *Advances in nano research*. 2024 Jan;17(6):547-58.
- [29] Ebrahimi F, Goudarzfalahi M, Ziazi AA. Comparative analysis of nonlinear buckling and postbuckling in shear-deformable sandwich composite toroidal shell segments with diverse auxetic cores and CNT-reinforced face sheets. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2025 May 3;25(3):154.
- [30] Ebrahimi F, Goudarzfalahi M, Ziazi AA. Enhancing nonlinear static stability behavior of axially compressed sandwich composite toroidal shells with a bio-inspired auxetic core. *Acta Mechanica*. 2025 Mar 26:1-8.
- [31] Ebrahimi F, Goudarzfalahi M, Alinia-ziazi A. Thermomechanical stability enhancement in sandwich composite toroidal shells utilizing star-shaped auxetic core. *Acta Mechanica*. 2025 Nov;236(11):6663-87.
- [32] Huang H, Han Q. Nonlinear buckling of torsion-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environment. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2010 Jan 1;29(1):42-8.
- [33] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press; 2003 Nov 24.
- loads. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. 2025;16(4).
- [15] Ebrahimi F, Goudarzfalahi M, Ziazi AA. Static stability analysis of graphene origami-reinforced nanocomposite toroidal shells with various auxetic cores. *Advances in nano research*. 2024 Jan:1-8.
- [16] Ebrahimi F, Goudarzfalahi M, Ziazi AA. Porosity effects on the buckling and post buckling of metamaterial sandwich toroidal shell segments. *Steel and Composite Structures*. 2024 Nov;53(3):313.
- [17] Ebrahimi F, Goudarzfalahi M, Ziazi AA. Assessing the effect of stiffeners on the stability of sandwich metacomposite toroidal shells under axial compression. *Advances in aircraft and spacecraft science*. 2024 Jan;11(4):363-82.
- [18] Shen HS. Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells. *Composite Structures*. 2011 Jul 1;93(8):2096-108.
- [19] Shen HS. Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: Pressure-loaded shells. *Composite Structures*. 2011 Sep 1;93(10):2496-503.
- [20] Van Tien N, Phuong NT, Duc VM, Minh TQ, Dong DT, Quan PH, Nam VH, Ly LN. Nonlinear thermomechanical buckling of torsion-loaded cylindrical shells with eccentric stiffeners made from CNT-reinforced composite. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*. 2022 Dec;46(4):1107-19.
- [21] Ly LN, Duc VM, Trung NT, Phuong NT, Dong DT, Minh TQ, Tien NV, Hung VT. An analytical approach to the nonlinear buckling behavior of axially compressed auxetic-core cylindrical shells with carbon nanotube-reinforced coatings. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. 2021 Oct;235(10):2254-65.
- [22] Dong, D. T., Phuong, N. T., Nam, V. H., Ly, L. N., Tien, N. V., Duc, V. M., ... & Giang, N. T. H. (2023). An analytical approach for nonlinear buckling analysis of torsionally loaded sandwich carbon nanotube reinforced cylindrical shells with auxetic Core. *Adv. Appl. Math. Mech*, 15, 468-484.
- [23] Duc ND, Kim SE, Quan TQ, Manh DT, Cuong NH. Nonlinear buckling of eccentrically stiffened nanocomposite cylindrical panels in thermal

جدول علائم

نماد	توضیح
W_{Gr}	درصد وزنی گرافن
V_{Gr}	کسر حجمی گرافن
H_{Gr}	درصد تاشدگی گرافن-اورینگامی
N_L	تعداد لایه‌های هسته
F	تابع تنش ایری
h	ضخامت کلی سازه
R	شعاع پوسته استوانه‌ای
L	طول پوسته استوانه‌ای
h_2	ضخامت هسته
τ	تنش پیچشی
ϕ	زاویه پیچش
T	دما
m, n	مود کماتش در راستای طولی و محیطی
λ	تانژانت زاویه بین راستای بدون تغییر مکان و راستای محوری
E_c	مدول یانگ هسته
ν_c	نسبت پواسون هسته
α_c	ضریب انبساط حرارتی هسته
ρ_c	چگالی هسته
E_{11}^{CNTRC}	مدول الاستیک طولی لایه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی
E_{22}^{CNTRC}	مدول الاستیک عرضی لایه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی
G_{12}^{CNTRC}	مدول برشی لایه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی
α_{11}^{CNTRC}	ضریب انبساط حرارتی طولی لایه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی
α_{22}^{CNTRC}	ضریب انبساط حرارتی عرضی لایه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی